ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1937

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

N. GUNTHER

SUR LES NOYAUX DU TYPE FOURIER

L'article contient une démonstration rigoureuse des résultats relatifs à la théorie des noyaux du type Fourier et des séries orthoganales, auparavant énoncés par l'auteur sans preuve.

1. Introduction

Désignons par $f(\tau)$ la valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(\tau) = (\gamma, \delta)$. Posons

$$f(\tau) = \frac{1}{\delta - \gamma} \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Il a été démontré dans mes deux notes sur les noyaux du type Fourier[1] le théorème suivant: si (condition (a)) la fonction $k(y, x)$ est symétrique pour $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant y < +\infty$ et si d'autre part (condition (b)) on a

$$\int_0^{\infty} k^2(\tau, x)\, dx = \frac{1}{\tau}, \tag{2}$$

où $\tau = \delta - \gamma$ est la mesure de l'intervalle (τ), quelle que soit la fonction continue $u(x)$, l'égalité

$$\int_0^{\infty} k(\omega, y)\Big(\int_0^a k(z, y)\, u(z)\, dz\Big) dy = \frac{1}{\omega} \int_{[\omega a]} u(x)\, dx, \tag{3}$$

est valable pour tout intervalle $(\omega) = (\alpha, \beta)$, où $[\omega a]$ est la partie commune aux intervalles $(0, a)$ et (ω) et où ω est la mesure de (ω). Réciproquement, si l'égalité (3) est vérifiée pour toute fonction continue, la condition (2) est réalisée. Il suit de l'égalité (3) que,

$$\text{si } g(\tau) = \int_0^a k(\tau, z)\, u(z)\, dz, \quad \text{on a} \int_{[\omega a]} u(x)\, dx = \int_0^{\infty} k(\omega, y)\, g(y)\, dy, \tag{4}$$

[1] Sur les équations intégrales aux noyaux du type Fourier de M-r H. Weyl. Journal de l'Institut mathématique de l'Académie de la RSS d'Ukraine, 2, 1936; Sur une intégrale analogue à l'intégrale de Fourier. C. R. de l'Acad. des Sci. de l'URSS, IV, 7, 1936.

car il est évidemment permis d'intervertir l'ordre d'intégration dans l'intégrale

$$\int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{0}^{a} k(y, z)\, u(z)\, dz\right) dy. \tag{5}$$

Posons une nouvelle restriction à la fonction $k(y, x)$ (condition (c)): supposons que pour toute fonction $f(x)$ à carré sommable, l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} k(\tau, z)\, f(z)\, dz \tag{6}$$

est égale à la valeur moyenne $g(\tau)$ d'une fonction à carré sommable. Dans ce cas la proposition (4) peut être remplacée par la proposition suivante:

$$\text{si } g(\tau) = \int_{0}^{\infty} k(\tau, z)\, f(z)\, dz, \quad \text{on a } f(\omega) = \int_{0}^{\infty} k(\omega, y)\, g(y)\, dy. \tag{7}$$

Si la fonction $k(y, x)$ est une fonction du produit xy:

$$k(y, x) = k(yx) \tag{8}$$

et si l'on pose

$$\chi(z) = \int_{0}^{z} k(z)\, dz, \tag{9}$$

on peut donner à la proposition (7) la forme:

$$\text{si } \int_{0}^{x} g(x) dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\chi(xy)}{y} f(y)\, dy, \text{ on a } \int_{0}^{x} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\chi(xy)}{y} g(y)\, dy, \tag{10}$$

l'égalité (2) étant équivalente à

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\chi(xz)\,\chi(zy)}{z^2}\, dz = \min(x, y).. \tag{11}$$

Réciproquement, si les égalités (10) ont lieu pour toute fonction $f(y)$ à carré sommable, la fonction $\chi(z)$ vérifie l'égalité (11).

M. G. N. Watson[2] a le premier trouvé toutes les fonctions $\chi(z)$ pour lesquelles la proposition (10) existe, c'est-à-dire, toutes les fonctions qui vérifient l'équation (11).

Le but de cet article est de trouver toutes les solutions de l'équation (2) qui sont symétriques en (x) et (y) et même toutes les solutions des équations plus générales dont nous parlerons dans les paragraphes suivants.

Cet article est résumé dans ma note «Sur les noyaux du type Fourier», C. R., t. 204, 1937.

---

[2] Watson G. N., General transforms, Proceedings L. M. S., 1933, ser. 2, vol. 35, p. 157.

2. Position du problème

Soit (Ω) un domaine de points dans l'espace à n dimensions, $n = 1, 2 \ldots$, à mesure finie ou infinie. Soit (x) un point de (Ω). Soit donnée une fonction des domaines (τ) appartenant à (Ω) et des points (x), qui est une fonction de (x) à carré sommable dans (Ω), pour (τ) fixe et à mesure finie. Désignons par $k(\tau, \omega)$, $g(\tau)$,... les valeurs moyennes des fonctions $k(\tau, x)$, $g(x)$, ...

$$k(\tau, \omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} k(\tau, x)\, d\omega, \quad g(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} g(x)\, d\omega. \tag{1}$$

Nous supposons que $k(\tau, \omega)$ est additive dans (Ω) par rapport à (τ), (ω) étant fixe, sous-entendant que pour chaque paire de domaines (τ_1) et (τ_2) contigus et à mesure finie l'égalité

$$k(\tau_1, \omega)\,\tau_1 + k(\tau_2, \omega)\,\tau_2 = k(\tau_1 + \tau_2, \omega)(\tau_1 + \tau_2) \tag{2}$$

est vérifiée.

Nous supposons de plus que la fonction $k(\tau, \omega)$ est à variation bornée dans tout domaine $(\Omega^{(s)})$ à mesure finie intérieur à (Ω), c'est-à-dire, que, pour toute décomposition du domaine $(\Omega^{(s)})$ en domaines partiels (τ_1), (τ_2) ... (τ_m), l'inégalité

$$|k(\tau_1, \omega)|\,\tau_1 + \ldots + |k(\tau_m, \omega)|\,\tau_m < B \tag{3}$$

est vérifiée, B étant un nombre dépendant du choix de $(\Omega^{(s)})$. Le problème principal de cet article est le suivant:

Former toutes les fonctions $k(\tau, x)$ répondant aux conditions:

$$\text{a)} \quad k(\tau, \omega) = k(\omega, \tau) \tag{4}$$

pour deux domaines (τ) et (ω) à mesure finie intérieurs à (Ω) et

$$\text{b)} \quad \int_{(\Omega)} k^2(\tau, x)\, d\omega = \frac{1}{\tau} \tag{5}$$

Nous dirons que le noyau $k(\tau, x)$ est du type Fourier, au cas qu'il réponde aux conditions (a) et (b) et possède les propriétés mentionnées au début du ce paragraphe.

Nous démontrerons qu'une suite quelconque $\{\psi_k(x)\}$ de fonctions à carré sommable dans (Ω), orthogonale, normée et fermée dans (Ω) étant choisie, toute fonction $k(\tau, x)$ vérifiant les conditions du problème peut être définie par une série convergente de la forme

$$k(\tau, \omega) = \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} \psi_k(\tau) \Big) \psi_s(\omega) \tag{6}$$

les coefficients $c_s^{(k)}$ formant une matrice

$$\| c_s^{(k)} \| \tag{7}$$

symétrique et unitaire.

Réciproquement, chaque serie de la forme (6) a pour somme la valeur moyenne d'une fonction $k(\tau, x)$ à carré sommable dans (Ω), vérifiant toutes les conditions du problème.

Si la fonction $k(\tau, x)$, en répondant aux conditions qui lui sont imposées, vérifie les équations (5) et (4), toute fonction $f(x)$ à carré sommable dans (Ω) satisfait aux conditions suivantes:

(A) l'intégrale

$$\int_{\Omega} k(\tau, x) f(x)\, d\omega \tag{8}$$

est égale à la valeur moyenne d'une fonction $g(x)$ à carré sommable dans (Ω) et

(B) si

$$g(\tau) = \int_{(\Omega)} k(\tau, x)\, f(x)\, d\omega,$$

on a

$$f(\omega) = \int_{(\Omega)} k(\omega, y)\, g(y)\, d\tau; \tag{9}$$

(C) enfin on a:

$$\int_{(\Omega)} f^2(x)\, d\omega = \int_{(\Omega)} g^2(x)\, d\omega. \tag{10}$$

Réciproquement, si la fonction $k(\tau, x)$ vérifie les conditions (a), (A) et (B), elle satisfait à la condition (b).

Remarquons que nous ne supposons point que la fonction $k(\tau, x)$ soit égale à la valeur moyenne d'une fonction $k(y, x)$. Par exemple, la fonction

$$\delta(\tau, x), \tag{11}$$

qui est égale à $\frac{1}{\tau}$ ou à zéro suivant que le point (x) est compris dans (τ) ou lui est extérieur, satisfait à toutes les conditions du problème; la fonction $\delta(\tau, x)$ est définie par la série[3] convergente

$$\delta(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau)\, \psi_k(\omega). \tag{12}$$

R e m a r q u e. La fonction (11) est le noyau d'une opération reproduisant toute fonction continue $f(x)$, car on a, en se servant des intégrales de Stieltjes,

$$f(x) = \int_{(\Omega)} \delta(\tau, x)\, f(y)\, d\tau; \tag{13}$$

pour toute fonction $f(x)$ à carré sommable, si la mesure de (τ) est finie, on a

$$f(\tau) = \int_{(\Omega)} \delta(\tau, x) f(x)\, d\omega. \tag{14}$$

Il est commode d'appeler la fonction $\delta(\tau, x)$ unité fonctionnelle.

[3] Voir l'Appendice 4.

3. Remarque sur les intégrales de Hellinger

Soient données deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ à carré sommable dans (Ω). Considérons un domaine $(\Omega^{(s)})$ à mesure finie appartenant à (Ω), le domaine (Ω) lui-même, peut-être. Ayant divisé $(\Omega^{(s)})$ en domaines partiels (τ_1), (τ_2), ..., (τ_n), formons les sommes

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\int\limits_{(\tau_k)} f(x)\, d\omega \cdot \int\limits_{(\tau_k)} F(x)\, d\omega}{\tau_k} = \sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k) F(\tau_k) \tau_k. \tag{1}$$

On peut démontrer que les sommes (1) tendent vers une limite déterminée quand $n \to \infty$, les domaines (τ_k) tendant uniformément vers zéro. Cette limite est égale à

$$\int\limits_{(\Omega^{(s)})} f(x)\, F(x)\, d\omega. \tag{2}$$

Nous désignerons cette limite, qui est une intégrale de Hellinger, par

$$\int\limits_{(\Omega^{(s)})} f(\tau)\, F(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

ce qui rappelle la formation des sommes (1). Si la mesure de (Ω) n'est pas finie, nous désignons par

$$\int\limits_{(\Omega)} f(\tau)\, F(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

la limite de (3) quand $(\Omega^{(s)})$ tend vers (Ω), cette limite existant toujours. La limite en question est égale à

$$\int\limits_{(\Omega)} f(x)\, F(x)\, d\omega. \tag{5}$$

Les démonstrations des propositions citées se rattachent à la théorie des intégrales de Stieltjes; afin de ne pas interrompre les raisonnements, ils sont données dans l'appendice. Avec cette proposition nous y démontrerons la suivante:

Soit $\varphi(\tau)$ une fonction moyenne additive et bornée dans tout domaine $(\Omega^{(s)})$ à mesure finie, appartenant à (Ω); si l'intégrale de Hellinger

$$\int\limits_{(\Omega)} \varphi^2(\tau)\, d\tau$$

a un sens, la fonction $\varphi(\tau)$ est la valeur moyenne d'une fonction $\varphi(x)$ à carré sommable.

4. Introduction des intégrales de Hellinger

En utilisant les intégrales de Hellinger on peut remplacer les conditions (B) et (C) par les conditions suivantes:

$$\text{si} \quad g(\tau) = \int_{(\Omega)} k(\tau, \omega) f(\omega)\, d\omega,$$

on a

$$f(\omega) = \int_{(\Omega)} k(\omega, \tau)\, g(\tau)\, d\tau \tag{1}$$

et

$$\int_{(\Omega)} f^2(\omega)\, d\omega = \int_{(\Omega)} g^2(\omega)\, d\omega. \tag{2}$$

Sous cette forme il n'est pas nécessaire, la valeur moyenne d'une fonction sommable $g(\tau)$ étant trouvée, de revenir par un passage à la limite à une fonction sommable $g(x)$ équivalente à $g(\tau)$. L'équation (b) peut prendre la forme

$$\int_{(\Omega)} k^2(\tau, \omega)\, d\omega = \frac{1}{\tau}. \tag{3}$$

5. Remarque sur le théorème de Stekloff

Soit

$$\{\psi_k(x)\} \tag{1}$$

une suite de fonctions à carré sommable dans (Ω), orthogonale, normée et fermée dans (Ω), c'est-à-dire répondant aux conditions

$$\int_{(\Omega)} \psi_k(x)\psi_l(x)\, d\omega = 0, \quad k \neq l, \quad \int_{(\Omega)} \psi_k^2(x)\, d\omega = 1 \tag{2}$$

et telle, que pour chaque fonction $f(x)$ à carré sommable

$$\text{on a} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_{(\Omega)} f^2(x)\, d\omega, \quad \text{si } c_k = \int_{(\Omega)} f(x)\psi_k(x)\, d\omega. \tag{3}$$

Suivant le théorème de Stekloff (voir l'Appendice 2), la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \psi_k(\tau), \tag{4}$$

où il est posé

$$c_k = \int_{(\Omega)} f(x)\, \psi_k(x)\, d\omega, \tag{5}$$

$f(x)$ étant une fonction à carré sommable, est convergente et a pour somme la valeur moyenne $f(\tau)$ de $f(x)$.

Si la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{6}$$

converge, la somme de la série (4), même quand la suite (1) n'est pas fermée, est égale à la valeur moyenne d'une certaine fonction $f(x)$ à carré sommable. Les coefficients de la série sont données par la formule (5).

La suite (1) des fonctions à carré sommable, orthogonale et normée, étant fermée ou non, on peut, si la série (6) converge, intégrer la série (4) terme à terme au sens des intégrales de Hellinger après multiplication par la valeur moyenne $g(\tau)$ d'une fonction à carré sommable, et cela dans tout domaine (Δ) à mesure finie ou infinie, appartenant à (Ω). (Voir l'Appendice 3.)

L'égalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \tag{7}$$

est la condition nécessaire et suffisante de la fermeture de la suite (1). (Voir l'Appendice 4.)

Remarque. L'égalité (12) du par. 2 peut être considérée comme condition nécessaire et suffisante pour que la suite (1) soit fermée. D'après quoi, on peut donner à la condition en question la forme suivante: pour que la valeur moyenne $f(\omega)$ de toute fonction $f(x)$ à carré sommable soit developpable en une série convergente suivant les valeurs moyennes des fonctions fondamentales, il faut et il suffit que la valeur moyenne de l'unité fonctionnelle $\delta(\tau, x)$ soit developpable en une telle série.

6. Condition (b)

Considérons les noyaux du type Fourier.

Supposons que les conditions (A) et (B) soient remplies pour toute fonction $f(x)$ à carré sommable dans (Ω). En prenant pour $f(x)$ l'unité fonctionnelle $\delta(\omega, x)$, ω étant un domaine à mesure finie appartenant à (Ω), on trouve

$$g(\tau) = \int_{(\Omega)} k(\tau, z)\, \delta(\omega, z)\, d\zeta = \frac{1}{\omega} \int_{(\Omega)} k(\tau, z)\, d\zeta = k(\tau, \omega) \tag{1}$$

et, par conséquent,

$$\delta(\tau, \omega) = \int_{(\Omega)} k(\tau, \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta = \int_{(\Omega)} k(\tau, \zeta)\, k(\zeta, \omega)\, d\zeta. \tag{2}$$

Comme $k(\zeta, \omega) = k(\omega, \zeta)$, on trouve, en posant $(\tau) = (\omega)$

$$\int_{(\Omega)} k^2(\tau, \zeta)\, d\zeta = \int_{(\Omega)} k^2(\tau, z)\, d\zeta = \delta(\tau, \tau) = \frac{1}{\tau}, \tag{3}$$

c'est-à-dire, on obtient l'équation (b). Ainsi, la condition (b) est nécessaire pour la validité des conditions (A) et (B).

Il reste à démontrer qu'elle est aussi suffisante.

Remarquons que le résultat de ce paragraphe permet de donner au théorème du par. 2 la forme suivante: pour que les conditions (A) et (B) soient valables pour toute fonction $f(x)$ à carré sommable dans (Ω) il suffit qu'elles le soient pour l'unité fonctionnelle.

En revenant à l'égalité (3), on s'assure aisément (voir l'Appendice 4) qu'elle a pour conséquence l'égalité (2).

Si les domaines (τ) et (ω) n'ont pas de points intérieurs communs, il en résulte que

$$\int_{(\Omega)} k(\tau, \zeta)\, k(\omega, \zeta)\, d\zeta = \int_{(\Omega)} k(\tau, z)\, k(\omega, z)\, d\zeta = 0. \tag{4}$$

7. Lemme 1

Soit (Δ) un domaine à mesure finie ou infinie appartenant à (Ω). Si $f(x)$ est une fonction à carré sommable dans (Ω) et $k(\tau, x)$ répond aux conditions (a) et (b), on a

$$\int_{(\Omega)} \left(\int_{(\Delta)} k(\tau, x)\, f(x)\, d\omega \right)^2 d\tau \leqslant \int_{(\Delta)} f^2(x)\, d\omega, \tag{1}$$

l'intégrale du premier membre de (1) ayant un sens.

Soient $(\Delta^{(s)})$, $(\Omega^{(\sigma)})$ des domaines à mesure finie, inscrits dans (Δ) et (Ω) et tendant vers (Δ) et (Ω) lorsque $s \to \infty$ et $\sigma \to \infty$, les domaines (Δ) et (Ω) eux-mêmes peut-être. Décomposons $(\Delta^{(s)})$ en domaines partiels $(\tau_1^{(s)})$, $(\tau_2^{(s)})$, ..., $(\tau_n^{(s)})$ et considérons la fonction

$$\Phi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k^{(s)})\, \delta(\tau_k^{(s)}, \omega)\, \tau_k^{(s)} \tag{2}$$

qui est égale à la valeur moyenne de la fonction

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k^{(s)})\, \delta(\tau_k^{(s)}, x)\, \tau_k^{(s)}. \tag{3}$$

En s'appuyant sur la condition (a), on peut écrire

$$\int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\, \delta(\tau_k^{(s)}, \omega)\, \tau_k^{(s)}\, d\omega = \int_{(\Delta)} k(\tau, x)\, \delta(\tau_k^{(s)}, x)\, \tau_k^{(s)}\, d\omega =$$

$$= \int_{(\tau_k^{(s)})} k(\tau, x)\, d\omega = k(\tau, \tau_k^{(s)})\, \tau_k^{(s)} = k(\tau_k^{(s)}, \tau)\, \tau_k^{(s)}. \tag{4}$$

On trouve

$$\int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\, \Phi_n(\omega)\, d\omega = \sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k^{(s)}) \int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\, \delta(\tau_k^{(s)}, \omega)\, \tau_k^{(s)}\, d\omega =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k^{(s)})\, k(\tau_k^{(s)}, \tau)\, \tau_k^{(s)} \tag{5}$$

et

$$\int_{(\Omega^{(\sigma)})}\left(\int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega\right)^2 d\tau = \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k^{(s)}) \int_{(\Omega^{(\sigma)})} k^2(\tau_k^{(s)}, \tau)\,\tau_k^{(s)2}\,d\tau +$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1,\, l\neq k}^{l=n} f(\tau_k^{(s)})\,f(\tau_l^{(s)}) \int_{(\Omega^{(\sigma)})} k(\tau_k^{(s)}, \tau)\,k(\tau_l^{(s)}, \tau)\,\tau_k^{(s)}\,\tau_l^{(s)}\,d\tau. \qquad (6)$$

Or le premier membre de (6) croit quand $\sigma \to \infty$; on a donc d'après la condition (b)

$$\int_{(\Omega^{(\sigma)})}\left(\int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega\right)^2 d\tau \leqslant \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k^{(s)}) \lim_{\sigma\to\infty} \int_{(\Omega^{(\sigma)})} k^2(\tau_k^{(s)}, y)\,\tau_k^{(s)2}\,d\tau +$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1,\, l\neq k}^{l=n} f(\tau_k^{(s)})\,f(\tau_l^{(s)}) \lim_{\sigma\to\infty} \int_{(\Omega^{(\sigma)})} k^2(\tau_k^{(s)}, y)\,k(\tau_l^{(s)}, y)\,\tau_k^{(s)}\,\tau_l^{(s)}\,d\tau =$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k^{(s)}) \int_{(\Omega)} k^2(\tau_k^{(s)}, y)\,\tau_k^{(s)2}\,d\tau +$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1,\, l\neq k}^{l=n} f(\tau_k^{(s)})\,f(\tau_l^{(s)}) \int_{(\Omega)} k(\tau_k^{(s)}, y)\,k(\tau_l^{(s)}, y)\,\tau_k^{(s)}\,\tau_l^{(s)}\,d\tau =$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k^{(s)})\,\tau_k^{(s)}. \qquad (7)$$

Faisons $n \to \infty$; on trouve enfin

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{(\Omega^{(\sigma)})}\left(\int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega\right)^2 d\tau \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k^{(s)})\,\tau_k^{(s)} =$$
$$= \int_{(\Delta^{(s)})} f^2(\tau)\,d\tau = \int_{(\Delta^{(s)})} f^2(y)\,d\tau < \int_{(\Delta)} f^2(y)\,d\tau. \qquad (8)$$

En revenant à l'égalité (5) nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k^{(s)}) \int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\,\delta(\tau_k^{(s)}, \omega)\tau_k\,d\omega =$$
$$= \lim_{n\to 0}\sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k^{(s)})\,k(\tau_k^{(s)}, \tau)\tau_k^{(s)} = \int_{(\Delta^{(s)})} k(\tau, \omega)\,f(\omega)\,d\omega. \qquad (9)$$

Divisons maintenant le domaine $(\Omega^{(\sigma)})$ en domaines partiels (τ_1), (τ_2), ..., (τ_m). On a

$$\sum_{l=1}^{l=m}\left(\int_{(\Delta)} k(\tau_l, \omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega\right)^2 \tau_l \leqslant \int_{(\Omega^{(\sigma)})}\left(\int_{(\Delta)} k(\tau, \omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega\right)^2 d\tau \qquad (10)$$

car la somme dans le premier membre de (10) tend vers sa limite en croissant quand on augmente le nombre m des domaines (τ_l) en les partageant. (Voir l'Appendice 1.)

D'après (8)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{l=m}\Big(\int_{(\Delta)} k(\tau_l,\omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega\Big)^2\tau_l\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{(\Omega^{(\sigma)})}\Big(\int_{(\Delta)} k(\tau,\omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega\Big)^2 d\tau\leqslant\int_{(\Delta)} f^2(x)\,d\omega. \qquad (11)$$

Or, il suit de (9) que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{l=m}\Big(\int_{(\Delta)} k(\tau_l,\omega)\,\Phi_n(\omega)\,d\omega\Big)^2\tau_l=$$

$$=\sum_{l=1}^{l=m}\Big(\int_{(\Delta^{(s)})} k(\tau_l,\omega)\,f(\omega)\,d\omega\Big)^2\tau_l. \qquad (12)$$

En faisant dans (12) $s\to\infty$ on trouve, vu l'inégalité (11), que

$$\sum_{l=1}^{l=m}\Big(\int_{(\Delta)} k(\tau_l,\omega)\,f(\omega)\,d\omega\Big)^2\tau_l\leqslant\int_{(\Delta)} f^2(x)\,d\omega. \qquad (13)$$

Enfin, en supposant que $m\to\infty$, on trouve que

$$\int_{(\Omega^{(\sigma)})}\Big(\int_{(\Delta)} k(\tau,\omega)\,f(\omega)\,d\omega\Big)^2 d\tau\leqslant\int_{(\Delta)} f^2(x)\,d\omega. \qquad (14)$$

Pour obtenir l'inégalité (1) il ne reste qu'à faire tendre σ vers ∞ dans l'inégalité (14).

Les raisonnements que nous venons de terminer montrent que la fonction

$$\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega)\,f(\omega)\,d\omega=\int_{(\Omega)} k(\tau,x)\,f(x)\,d\omega \qquad (15)$$

est à carré sommable, c'est-à-dire, que la condition (A) est une conséquence des conditions (a) et (b) et des restrictions imposées à $k(\tau,x)$ au début du par. 2, y compris la supposition que $k(\tau,x)$, comme fonction du points (x), est à carré sommable dans (Ω).

8. Lemme 2

Si $(\Omega^{(s)})$ *tend vers* (Ω) *quand* $s\to\infty$, *on a*

$$\lim_{s\to\infty}\int_{(\Omega)}\Big[\delta(\omega,\zeta)-\int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta,y)\,k(\omega,y)\,d\tau\Big]^2 d\zeta=0. \qquad (1)$$

La démonstration du lemme est immédiate. En effet, on a

$$\int_{(\Omega)}\Big[\delta(\omega,\zeta)-\int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta,y)\,k(\omega,y)\,d\tau\Big]^2 d\zeta=$$

$$=\int_{(\Omega)}\delta^2(\omega,\zeta)\,d\zeta-2\int_{(\Omega)}\delta(\omega,\zeta)\Big(\int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta,y)\,k(\omega,y)\,d\tau\Big)d\zeta+$$

$$+\int_{(\Omega)}\Big(\int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta,y)\,k(\omega,y)\,d\tau\Big)^2 d\zeta\,; \qquad (2)$$

d'autre part on a

$$\int_{(\Omega)} \delta^2(\omega, \zeta)\, d\zeta = \int_{(\Omega)} \delta^2(\omega, z)\, d\zeta = \frac{1}{\omega^2}\int_{(\omega)} d\zeta = \frac{1}{\omega} \tag{3}$$

$$\int_{(\Omega)} \delta(\omega, \zeta)\Big(\int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta, y)\, k(\omega, y)\, d\tau\Big) d\zeta = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)}\Big(\int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta, y)\, k(\omega, y)\, d\tau\Big) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\omega}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta_i, y)\; k(\omega, y)\; d\tau\zeta_i =$$

$$= \frac{1}{\omega}\lim_{n\to\infty}\int_{(\Omega^{(s)})}\Big(\sum_{i=1}^{i=n} k(\zeta_i, y)\,\zeta_i\Big)\, k(\omega, y)\, d\tau =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{(\Omega^{(s)})} k(\omega, y)\; k(\omega, y)\; d\tau = \int_{(\Omega^{(s)})} k^2(\omega, y)\, d\tau, \tag{4}$$

si (ζ_1), (ζ_2), ..., (ζ_n) sont des domaines partiels formant (ω), et suivant le lemme 1,

$$\int_{(\Omega)}\Big(\int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta, y)\, k(\omega, y)\, d\tau\Big)^2 d\zeta \leq \int_{(\Omega^{(s)})} k^2(\omega, y)\, d\tau, \tag{5}$$

il en résulte que

$$\int_{(\Omega)}\Big[\delta(\omega, \zeta) - \int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta, \tau)\, k(\omega, \tau)\, d\tau\Big]^2 d\zeta \leq \frac{1}{\omega} - \int_{(\Omega^{(s)})} k^2(\omega, y)\, d\tau. \tag{6}$$

D'après la condition (b) le second membre de (6) tend vers zéro quand $s \to \infty$, donc le lemme 2 est démontré.

9. Lemme 3

Si (θ) *et* (ω) *sont des domaines à mesure finie appartenant à* (Ω) *et* $k(\tau, x)$ *répond aux conditions* (a) *et* (b), *on a*

$$\lim_{s\to\infty}\int_{(\Omega)} k(\theta, \zeta)\Big(\int_{(\Omega^{(s)})} k(\omega,\tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau\Big) d\zeta = k(\theta, \omega). \tag{1}$$

En effet

$$\int_{(\Omega)} k(\theta, \zeta)\, \delta(\zeta, \omega)\, d\zeta = \int_{(\Omega)} k(\theta, z)\, \delta(\omega, z)\, d\zeta = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} k(\theta, z)\, d\zeta = k(\theta, \omega). \tag{2}$$

Considérons la différence

$$\Big| k(\theta, \omega) - \int_{(\Omega)} k(\theta, \zeta)\Big(\int_{(\Omega^{(s)})} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau\Big) d\zeta \Big| =$$

$$= \Big|\int_{(\Omega)} k(\theta, \zeta)\Big[\delta(\omega, z) - \int_{(\Omega^{(s)})} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau\Big] d\zeta\Big| <$$

$$< \sqrt{\int_{(\Omega)} k^2(\theta, \zeta)\, d\zeta}\cdot\sqrt{\int_{(\Omega)}\Big[\delta(\omega, \zeta) - \int_{(\Omega^{(s)})} k(\zeta, \tau)\, k(\omega, \tau)\, d\tau\Big]^2 d\zeta}. \tag{3}$$

Le premier facteur du dernier membre de l'inégalité (3) est égal à $\sqrt{\frac{1}{\theta}}$, et le second facteur tend vers zéro d'après le lemme 2. On voit que le lemme est démontré.

Or il résulte du lemme 1 que

$$\int_{(\Omega)} \left[\int_{(\Omega)} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau - \int_{(\Omega^{(s)})} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau \right]^2 d\zeta =$$

$$= \int_{(\Omega)} \left[\int_{(\Omega - \Omega^{(s)})} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau \right]^2 d\zeta =$$

$$= \int_{(\Omega)} \left(\int_{(\Omega - \Omega^{(s)})} k(\zeta, y)\, k(\omega, y)\, d\tau \right)^2 d\zeta < \int_{(\Omega - \Omega^{(s)})} k^2(\omega, y)\, dy; \qquad (4)$$

le second membre de (4) tend vers zéro si $s \to \infty$, la fonction $k(\omega, y)$ étant à carré sommable dans (Ω); on voit que la différence

$$\left| \int_{(\Omega)} k(\theta, \zeta) \left(\int_{(\Omega)} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau - \int_{(\Omega^{(s)})} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau \right) d\zeta \right| <$$

$$(5)$$

$$< \sqrt{\int_{(\Omega)} k^2(\theta, \zeta)\, d\zeta} \sqrt{\int_{(\Omega)} \left[\int_{(\Omega)} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau - \int_{(\Omega^{(s)})} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau \right]^2 d\zeta}$$

est infiniment petite. D'où

$$k(\theta, \omega) = \int_{(\Omega)} k(\theta, \zeta) \left(\int_{(\Omega)} k(\zeta, \tau)\, k(\omega, \tau)\, d\tau \right) d\zeta. \qquad (6)$$

10. Condition (B)

Pour établir cette condition il suffit de démontrer l'égalité

$$\int_{(\Omega)} k(\omega, \tau) \left(\int_{(\Omega)} k(\zeta, \tau)\, f(\zeta)\, d\zeta \right) d\tau = \int_{(\Omega)} f(\zeta) \left(\int_{(\Omega)} k(\omega, \tau)\, k(\zeta, \tau)\, d\tau \right) d\zeta \quad (1)$$

pour chaque fonction $f(x)$ à carré sommable.

Nous avons

$$\int_{(\Omega)} k(\omega, \tau) \left(\int_{(\Omega)} k(\zeta, \tau)\, f(\zeta)\, d\zeta \right) d\tau =$$

$$= \lim_{\sigma \to \infty} \int_{(\Omega^{(\sigma)})} k(\omega, \tau) \left(\int_{(\Omega)} k(\zeta, \tau)\, f(\zeta)\, d\zeta \right) d\tau. \qquad (2)$$

Divisons le domaine $(\Omega^{(\sigma)})$ en domaines partiels $(\tau_1), (\tau_2), \ldots, (\tau_n)$. Nous aurons

$$\int_{(\Omega^{(\sigma)})} k(\omega, \tau) \left(\int_{(\Omega)} k(\zeta, \tau)\, f(\zeta)\, d\zeta \right) d\tau =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} k(\omega, \tau_i) \left(\int_{(\Omega)} k(\zeta, \tau_i)\, f(\zeta)\, d\zeta \right) \tau_i =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{(\Omega)} f(\zeta) \left[\sum_{i=1}^{i=n} k(\zeta, \tau_i)\, k(\omega, \tau_i)\, \tau_i \right] d\zeta. \qquad (3)$$

Or la différence

$$\int_{(\Omega)} f(\zeta)\left[\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau)\,k(\omega,\tau)\,d\tau-\sum_{1}^{n} k(\zeta,\tau_i)\,k(\omega,\tau_i)\,\tau_i\right]d\zeta \tag{4}$$

est moindre en valeur absolue que

$$\sqrt{\int_{(\Omega)} f^2(\zeta)\,d\zeta}\sqrt{\int_{(\Omega)}\left[\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau)\,k(\omega,\tau)\,d\tau-\sum_{1}^{n} k(\zeta,\tau_i)\,k(\omega,\tau_i)\,\tau_i\right]^2 d\zeta}. \tag{5}$$

Etudions le second facteur de (5). En appliquant la condition (b) es le lemme 3 on trouve que son carré est égal a

$$\int_{(\Omega)}\left(\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau)\,k(\omega,\tau)\,d\tau\right)^2 d\zeta\,-$$

$$-2\sum_{i=1}^{i=n} k(\omega,\tau_i)\,\tau_i\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau_i)\left(\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau)\,k(\omega,\tau)\,d\tau\right)d\zeta\,+$$

$$+\sum_{i=n}^{i=n} k^2(\omega,\tau_i)\,\tau_i^2\int_{(\Omega)} k^2(\zeta,\tau_i)\,d\zeta\,+$$

$$+2\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1\ i\neq j}^{j=n} k(\omega,\tau_i)\,k(\omega,\tau_j)\,\tau_i\,\tau_j\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau_i)\,k(\zeta,\tau_j)\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{\omega}-2\sum_{i=1}^{i=n} k^2(\omega,\tau_i)\,\tau_i+\sum_{i=1}^{i=n} k^2(\omega,\tau_i)\,\tau_i=\frac{1}{\omega}-\sum_{i=1}^{i=n} k^2(\omega,\tau_i)\,\tau_i \tag{6}$$

car $k(\tau,\omega)=k(\omega,\tau)$ et

$$\int_{(\Omega)}\left(\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau)\,k(\omega,\tau)\,d\tau\right)^2 d\zeta=\int_{(\Omega)} \delta^2(\zeta,\omega)\,d\zeta=\frac{1}{\omega} \tag{7}$$

suivant la formule (2) du par. 6.

Ainsi la différence entre l'expression sous le signe de la limite dans (3) es l'intégrale

$$\int_{(\Omega)} f(\zeta)\left(\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau)\,k(\omega,\tau)\,d\tau\right)d\zeta \tag{8}$$

ne dépasse pas

$$\sqrt{\int_{(\Omega)} f^2(x)\,d\omega}\sqrt{\frac{1}{\omega}-\sum_{i=1}^{i=n} k^2(\omega,\tau_i)\,\tau_i} \tag{9}$$

et la limite de (9) pour $n\to\infty$ est égale à

$$\sqrt{\int_{(\Omega)} f^2(x)\,d\omega}\sqrt{\frac{1}{\omega}-\int_{(\Omega^{(\sigma)})} k^2(\omega,\tau)\,d\tau}. \tag{10}$$

On voit que (10) dépasse la valeur absolue de la bifférence

$$\int_{(\Omega^{(\sigma)})} k(\omega,\tau)\left(\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau)\,f(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau-\int_{(\Omega)} f(\zeta)\left(\int_{(\Omega)} k(\zeta,\tau)\,k(\omega,\tau)\,d\tau\right)d\zeta. \tag{11}$$

Puisque l'expression (10) tend vers zéro quand $\sigma \to \infty$, on conclut que l'égalité (1) est remplit. Or

$$\int_{(\Omega)} k(\zeta, \tau)\, k(\omega, \tau)\, d\tau = \delta(\zeta, \omega) \tag{12}$$

$$\int_{(\Omega)} f(\zeta)\, \delta(\zeta, \omega)\, d\zeta = \int_{(\Omega)} f(\zeta)\, \delta(\omega, z)\, d\zeta = f(\omega), \tag{13}$$

d'où il résulte que

$$f(\omega) = \int_{(\Omega)} k(\omega, \tau) \left(\int_{(\Omega)} k(\zeta, \tau) f(\zeta)\, d\zeta\right) d\tau, \tag{14}$$

ce qui était à démontrer.

11. Égalité (C)

Il ne nous reste qu'à démontrer l'égalité (C) du par. 2:

$$\int_{(\Omega)} f^2(x)\, dx = \int_{(\Omega)} g^2(x)\, dx = \int_{(\Omega)} \left(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\right)^2 d\tau. \tag{1}$$

Divisons le domaine $(\Omega^{(s)})$ en domaines partiels $(\tau_1), (\tau_2), \ldots, (\tau_n)$ et considérons les fonctions

$$k(\tau_1, x)\sqrt{\tau_1},\quad k(\tau_2, x)\sqrt{\tau_2},\ \ldots,\ k(\tau_n, x)\sqrt{\tau_n}. \tag{2}$$

On vérifie que les coefficients

$$c_k = \int_{(\Omega)} \left(\int_{(\Omega^{(s)})} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\right) k(\tau_k, y)\sqrt{\tau_k}\, d\tau \tag{3}$$

satisfont aux égalités

$$c_k = f(\tau_k)\sqrt{\tau_k}. \tag{4}$$

On peut en effet substituer à l'égalité (3) l'égalité

$$c_k = \int_{(\Omega)} \left(\int_{(\Omega)} k(\tau, x)\, \Phi(x)\, d\omega\right) k(\tau_k, y)\sqrt{\tau_k}\, d\tau \tag{5}$$

en remplaçant la fonction $f(x)$ par la fonction $\Phi(x)$, égale à $f(x)$ quand le point (x) est intérieur à $(\Omega^{(s)})$ et à zéro quand il lui est extérieur.

On voit que le second membre de (5) est égale à

$$\Phi(\tau_k)\sqrt{\tau_k} = f(\tau_k)\sqrt{\tau_k} \tag{6}$$

quand (τ_k) appartient à $(\Omega^{(s)})$.

Or, en vertu du théorème du par. 10 et de la condition (b) on a

$$0 \leqslant \int_{(\Omega)} \left[\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega - \sum_{l=1}^{l=n} c_l k(\tau_l, y)\sqrt{\tau_l}\right]^2 d\tau =$$

$$= \int_{(\Omega)} \left(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\right)^2 d\tau -$$

$$-2\sum_{l=1}^{l=n} c_l \int_{(\Omega)} k(\tau_l, y)\sqrt{\tau_l} \left(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\right) d\tau +$$

$$+\sum_{l=1}^{l=n} c_l^2 \int_{(\Omega)} k^2(\tau_l, y)\, d\tau \cdot \tau_l +$$

$$+2\sum_{l=1}^{l=n} \sum_{\substack{h=1\\ l\neq h}}^{h=n} c_l c_h \int_{(\Omega)} k(\tau_l, y)\, k(\tau_h, y)\, d\tau \sqrt{\tau_l}\sqrt{\tau_h} =$$

$$=\int_{(\Omega)} \Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\Big)^2 d\tau - \sum_{l=1}^{l=n} c_l^2 =$$

$$=\int_{(\Omega)} \Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\Big)^2 d\tau - \sum_{l=1}^{l=n} f^2(\tau_l)\, \tau_l. \tag{7}$$

Il en résulte que suivant le lemme 1

$$\sum_{l=1}^{l=n} f^2(\tau_l)\, \tau_l < \int_{(\Omega)} \Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\Big)^2 d\tau \leqslant \int_{(\Omega)} f^2(x)\, d\omega. \tag{8}$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on a

$$\int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x)\, d\omega \leqslant \int_{(\Omega)} \Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\Big)^2 d\tau \leqslant \int_{(\Omega)} f^2(x)\, d\omega, \tag{9}$$

et quand $s \to \infty$ on parvient à l'inégalité

$$\int_{(\Omega)} f^2(x)\, d\omega \leqslant \int_{(\Omega)} \Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\Big)^2 d\tau \leqslant \int_{(\Omega)} f^2(x)\, d\omega, \tag{10}$$

d'où suit l'égalité (1). L'égalité

$$\int_{(\Omega)} \Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\Big)^2 d\tau = \int_{(\Omega)} f^2(x)\, d\omega \tag{11}$$

étant démontrée, on en déduit sans peine que pour chaque paire de fonctions $f(x)$ et $F(x)$ à carré sommable on a

$$\int_{(\Omega)} \Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega\Big)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, x) F(x)\, d\omega\Big) d\tau = \int_{(\Omega)} f(x) F(x)\, d\omega. \tag{12}$$

Il suffit pour cela de remplacer dans (11) $f(x)$ par $\alpha f(x) + \beta F(x)$, α et β étant des constantes.

12. Lemme 4

Si $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions à carré sommable dans (Ω), on a

$$\int_{(\Omega)} F(\tau)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, \omega) f(\omega)\, d\omega\Big) d\tau = \int_{(\Omega)} f(\omega)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau, \omega) F(\tau)\, d\tau\Big) d\omega. \tag{1}$$

La démonstration suivra le même raisonnement que celui dont nous nous sommes servis dans le cas analogue du par. 10, mais toute-

fois en s'appuyant sur les résultats obtenus en ce paragraphe. Nous avons

$$\int_{(\Omega)} F(\tau)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega) f(\omega)\, d\omega\Big) d\tau =$$
$$= \lim_{\sigma\to\infty} \int_{(\Omega^{(\sigma)})} F(\tau)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega) f(\omega)\, d\omega\Big) d\tau \tag{2}$$

et, si (τ_1), (τ_2), ... , (τ_n) sont des domaines partiels formant $(\Omega^{(\sigma)})$.

$$\int_{(\Omega^{(\sigma)})} F(\tau)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega) f(\omega)\, d\omega\Big) d\tau =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} F(\tau_i)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau_i,\omega) f(\omega)\, d\omega\Big)\tau_i =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{(\Omega)} f(\omega)\Big[\sum_{i=1}^{i=n} k(\tau_i,\omega) F(\tau_i)\,\tau_i\Big] d\omega. \tag{3}$$

La différence

$$\int_{(\Omega)} f(\omega)\Big[\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega) F(\tau)\, d\tau - \sum_{i=1}^{i=n} k(\tau_i,\omega) F(\tau_i)\tau_i\Big] d\omega \tag{4}$$

ne dépasse pas en valeur absolue le produit

$$\sqrt{\int_{(\Omega)} f^2(\omega)\, d\omega}\ \sqrt{\int_{(\Omega)}\Big[\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega) F(\tau)\, d\tau - \sum_{i=1}^{i=n} k(\tau_i,\omega) F(\tau_i)\,\tau_i\Big]^2 d\omega}. \tag{5}$$

Le carré du second facteur de (5) est égal à

$$\int_{(\Omega)}\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega) F(\tau)\, d\tau\Big)^2 d\omega -$$
$$- 2\sum_{i=1}^{i=n} F(\tau_i)\,\tau_i \int_{(\Omega)} k(\tau_i,\omega)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega) F(\tau)\, d\tau\Big) d\omega +$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n} F^2(\tau_i)\,\tau_i^2 \int_{(\Omega)} k^2(\tau_i,\omega)\, d\omega +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{i=n}\ \sum_{j=1\ i\neq j}^{j=n} F(\tau_i)\ F(\tau_j)\,\tau_i\,\tau_j \int_{(\Omega)} k(\tau_i,\omega)\, k(\tau_j,\omega)\, d\omega =$$
$$= \int_{(\Omega)} F^2(x)\, d\omega - 2\sum_{i=1}^{i=n} F^2(\tau_i)\,\tau_i +$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n} F^2(\tau_i)\,\tau_i = \int_{(\Omega)} F^2(x)\, d\omega - \sum_{i=1}^{i=n} F^2(\tau_i)\,\tau_i. \tag{6}$$

résulte que l'expression sous le signe lim dans (3) diffère de

$$\int_{(\Omega)} f(\omega)\Big(\int_{(\Omega)} k(\tau,\omega) F(\tau)\, d\tau\Big) d\omega \tag{7}$$

d'une valeur inférieure à

$$\sqrt{\int\limits_{(\Omega)} f^2(x)\,d\omega}\ \sqrt{\int\limits_{(\Omega)} F^2(x)\,d\omega - \sum_{i=1}^{i=n} F^2(\tau_i)\,\tau_i} \tag{8}$$

et que sa limite pour $n \rightarrow \infty$ diffère de (7) d'une valeur inférieure à

$$\sqrt{\int\limits_{(\Omega)} f^2(x)\,d\omega}\ \sqrt{\int\limits_{(\Omega)} F^2(x)\,d\omega - \int\limits_{(\Omega^{(\sigma)})} F^2(x)\,d\omega}\,. \tag{9}$$

La dernière quantité tendant vers zéro quand $\sigma \rightarrow \infty$, on voit que l'égalité (1) est remplie.

13. Résolution de l'équation (b)

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation

$$\int\limits_{(\Omega)} k^2(\tau, x)\,d\omega = \frac{1}{\tau}\,. \tag{1}$$

Soit donnée une suite

$$\{\psi_k(x)\} \tag{2}$$

de fonctions à carré sommable dans (Ω), orthogonale, normée et fermée dans (Ω), c'est-à-dire répondant aux conditions

$$\int\limits_{(\Omega)} \psi_k^2(x)\,d\omega = 1, \quad \int\limits_{(\Omega)} \psi_k(x)\,\psi_l(x)\,d\omega = 0 \quad (k \neq l), \tag{3}$$

et telle que pour tout (τ) à mesure finie appartenant à (Ω) on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(\tau) = \frac{1}{\tau}\,. \tag{4}$$

D'après le théorème de Stekloff on a

$$k(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau)\,\psi_k(\omega), \tag{5}$$

où

$$\varphi_k(\tau) = \int\limits_{(\Omega)} k(\tau, x)\,\psi_k(x)\,d\omega, \tag{6}$$

la série (5) étant convergente et intégrable terme à terme, au sens des intégrales de Hellinger, après multiplication par la valeur moyenne $F(\omega)$ d'une fonction $F(x)$ à carré sommable.

L'application des théorèmes du paragraphe précédent montre que l'on a

$$\int\limits_{(\Omega)} \Bigl(\int\limits_{(\Omega)} k(\tau, x)\,\psi_k(x)\,d\omega \Bigr)^2 d\tau = \int\limits_{(\Omega)} \varphi_k^2(\tau)\,d\tau = \int\limits_{(\Omega)} \psi_k^2(x)\,d\omega = 1; \tag{7}$$

cette égalité seule démontre que $\varphi_k(\tau)$ est la valeur moyenne d'une fonction à carré sommable dans (Ω) (voir l'Appendice 1). Il suit donc des théorèmes indiqués que

$$\int_{(\Omega)} \varphi_k^2(x)\,d\omega = \int_{(\Omega)} \psi_k^2(x)\,d\omega = 1,$$

$$\int_{(\Omega)} \varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,d\omega = \int_{(\Omega)} \psi_k(x)\,\psi_l(x)\,d\omega = 0 \quad (k \neq l). \tag{8}$$

En appliquant le théorème de Stekloff à la fonction $\varphi_k(x)$ on trouve

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)}\,\psi_s(\tau) \tag{9}$$

où

$$c_s^{(k)} = \int_{(\Omega)} \varphi_k(\tau)\,\psi_s(\tau)\,d\tau = \int_{(\Omega)} \psi_s(y)\left(\int_{(\Omega)} k(\tau, x)\,\psi_k(x)\,d\omega\right)d\tau. \tag{10}$$

Suivant le théorème du par. 12 nous avons

$$\begin{aligned} c_s^{(k)} &= \int_{(\Omega)} \psi_s(\tau)\left(\int_{(\Omega)} k(\tau, \omega)\,\psi_k(\omega)\,d\omega\right)d\tau = \\ &= \int_{(\Omega)} \psi_k(\omega)\left(\int_{(\Omega)} k(\tau, \omega)\,\psi_s(\tau)\,d\tau\right)d\omega = \\ &= \int_{(\Omega)} \psi_k(\omega)\left(\int_{(\Omega)} k(\omega, \tau)\,\psi_s(\tau)\,d\tau\right)d\omega = c_k^{(s)}. \end{aligned} \tag{11}$$

En multipliant (9) par $\varphi_l(\tau)$ et en intégrant, on trouve

$$\int_{(\Omega)} \varphi_k(\tau)\,\varphi_l(\tau)\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} \int_{(\Omega)} \psi_s(\tau)\,\varphi_l(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

L'intégration de (9) pour $k = l$ après la multiplication par $\psi_s(\tau)$ donne

$$\int_{(\Omega)} \varphi_l(\tau)\,\psi_s(\tau)\,d\tau = \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_\sigma^{(l)} \int_{(\Omega)} \psi_\sigma(\tau)\,\psi_s(\tau)\,d\tau = c_s^{(l)}. \tag{13}$$

L'égalité (12) prend la forme

$$\int_{(\Omega)} \varphi_k(\tau)\,\varphi_l(\tau)\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)}\,c_s^{(l)} \tag{14}$$

et on voit que

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)}\,c_s^{(l)} = 0, \quad k \neq l, \quad \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)^2} = 1. \tag{15}$$

La matrice

$$\| c_s^{(k)} \| \tag{16}$$

est donc symétrique et unitaire et le noyau $k(\tau, \omega)$ a la forme

$$k(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} \psi_s(\tau)\Big)\psi_k(\omega). \tag{17}$$

Comme on a (voir l'Appendice 5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} \psi_s(\tau)\Big)^2 = \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s^2(\tau) = \frac{1}{\tau}, \tag{18}$$

la suite

$$\{\varphi_k(x)\}, \tag{19}$$

qui est, comme nous venons de le démontrer, orthogonale et normée, est fermée.

Réciproquement, si la matrice (16) est unitaire, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau)\,\psi_k(\omega), \tag{20}$$

où $\varphi_k(\tau)$ sont données par les égalités (9), a pour somme un noyau de Fourier.

En effet la somme de la série (9) est égale (voir l'Appendice 3) à la valeur moyenne d'une fonction à carré sommable dans (Ω) et la série (9) est intégrable terme à terme après multiplication par la valeur moyenne d'une fonction à carré sommable. D'où

$$\int_{(\Omega)} \varphi_k(\tau)\,\varphi_l(\tau)\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} \int_{(\Omega)} \psi_s(\tau)\,\varphi_l(\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} \int_{(\Omega)} \Big(\sum_{\sigma=1}^{\infty} c_\sigma^{(l)} \psi_\sigma(\tau)\Big)\psi_s(\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\infty} c_\sigma^{(l)} \int_{(\Omega)} \psi_\sigma(\tau)\,\psi_k(\tau)\,d\tau\Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)}\,c_h^{(l)} = 0, \quad k \neq l; \quad = 1, \quad k = l \tag{21}$$

et il en résulte que la suite (19) est orthogonale et normée. L'égalité (18) prouve qu'elle est fermée.

La somme des carrés des coefficients de (20) étant bornée pour (τ) fixe, on en conclut que la somme de la série (20) est égale à la valeur moyenne $k(\tau, \omega)$ d'une fonction $k(\tau, x)$ à carré sommable. La série (20) peut être intégrée terme à terme après multiplication par la valeur moyenne d'une fonction à carré sommable.

D'où

$$\int_{(\Omega)} k(\tau, \omega)\,\psi_k(\omega)\,d\omega = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(\tau) \int_{(\Omega)} \psi_s(\omega)\,\psi_k(\omega)\,d\omega = \varphi_s(\tau). \tag{22}$$

En multipliant la série (20) par $k(\tau, \omega)$ on trouve

$$\int_{(\Omega)} k^2(\tau, \omega)\, d\omega = \int_{(\Omega)} k^2(\tau, x)\, d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau) \int_{(\Omega)} k(\tau, \omega)\, \psi_k(\omega)\, d\omega =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(\tau) = \frac{1}{\tau}. \tag{23}$$

La fonction $k(\tau, x)$ vérifie donc l'équation (1).

L'égalité (9) donne

$$\int_{(\Omega)} \varphi_k(\tau)\, \psi_s(\tau)\, d\tau = c_s^{(k)} = c_k^{(s)}. \tag{24}$$

La suite (19) étant fermée, on a

$$\psi_k(\omega) = \sum_{s=1}^{\infty} c_k^{(s)} \varphi_s(\omega). \tag{25}$$

Nous avons par conséquent en changeant d'après la remarque de l'Appendice 5 l'ordre de sommation

$$k(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau)\, \psi_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau) \Big(\sum_{s=1}^{\infty} c_k^{(s)} \varphi_s(\omega) \Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(\omega) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(s)} \varphi_k(\tau) \Big) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(\omega) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} \varphi_k(\tau) \Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(\omega)\, \psi_s(\tau) = k(\omega, \tau). \tag{26}$$

Le noyau $k(\tau, \omega)$ est donc symétrique. Cette fonction est à variation bornée dans tout domaine à mesure finie, intérieur à (Ω), (τ) étant fixe, parce qu'elle est la valeur moyenne d'une fonction à carré sommable. La symétrie de $k(\tau, \omega)$ assure que pour (ω) fixe elle est à variation bornée comme fonction de (τ) dans tout domaine à mesure finie contenu dans (Ω).

Ainsi, on peut affirmer que la formule (20) donne tous les noyaux de Fourier et de telle façon qu'à deux matrices unitaires différentes il correspond toujours deux noyaux différents; la suite (2) étant donnée, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau)\, \psi_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(1)}(\tau)\, \psi_k(\omega) \tag{27}$$

n'est possible que si pour k quelconque on ait

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} \psi_s(\tau) = \varphi_k^{(1)}(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)'} \psi_s(\tau), \tag{28}$$

d'où

$$c_s^{(k)} = c_s^{(k)'}, \tag{29}$$

parce que la suite (2) est supposée fermée.

14. Sur les suites fermées

Soit donnée une suite de fonctions à carré sommable

$$\{\psi_k(x)\}, \tag{1}$$

orthogonale, normée et fermée. Soit donnée une matrice unitaire

$$\| c_s^{(k)} \|. \tag{2}$$

Formons les fonctions moyennes

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} \psi_k(\tau) \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Chaque $\varphi_s(\tau)$ est la valeur moyenne d'une fonction $\varphi_s^1(x)$ à carré sommable. La suite

$$\{\varphi_s(x)\} \tag{4}$$

est orthogonale, normée et fermée.

En effet, il résulte de l'Appendice 3, et des propriétés des matrices unitaires que

$$\int_{(\Omega)} \varphi_s(\tau)\varphi_\sigma(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} \int_{(\Omega)} \psi_k(\tau)\varphi_\sigma(\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} c_\sigma^{(l)} \int_{(\Omega)} \psi_k(\tau)\psi_l(\tau)\,d\tau \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} c_\sigma^{(k)} = 0, \quad s \neq \sigma; \quad = 1, \quad s = \sigma. \tag{5}$$

La suite (5) est donc orthogonale et normée. D'autre part

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s^2(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} \psi_k(\tau) \Big)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(\tau) = \frac{1}{\tau}; \tag{6}$$

la suite (5) est donc fermée.

Réciproquement, supposons donnée une suite arbitraire orthogonale, normée et fermée (4) de fonctions à carré sommable.

La suite (1) étant fermée, l'égalité (3) est vérifiée, $c_s^{(k)}$ étant les coefficients de Fourier

$$c_s^{(k)} = \int_{(\Omega)} \varphi_s(\tau)\psi_k(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Comme on a

$$\int_{(\Omega)} \varphi_s(\tau)\varphi_\sigma(\tau)\,d\tau = 0, \quad s \neq \sigma; \quad = 1, \quad s = \sigma, \tag{8}$$

on trouve, en refaisant les calculs (5), que les coefficients $c_s^{(k)}$ vérifient les conditions (5).

La suite (4) étant fermée, on trouve, vu l'égalité (7):

$$\psi_k(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} \varphi_s(\tau), \tag{9}$$

ce qui montre que les égalités

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} c_s^{(l)} = 0, \ k \neq l; \ = 1, \ k = l \tag{5'}$$

sont vérifiées, la suite (1) étant orthogonale et normée.

Une suite, orthogonale, normée et fermée dans (Ω), de fonctions à carré sommable étant donnée, l'égalité (3) donne toutes les suites analogues, $c_s^{(k)}$ étant les éléments d'une matrice unitaire.

La suite (1) orthogonale, normée et fermée dans (Ω) étant choisie, prenons une suite (4) de même nature et considérons la fontcion

$$k(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau) \psi_k(\omega). \tag{10}$$

La fonction $k(\tau, \omega)$ est la valeur moyenne d'une fonction $k(\tau, x)$ à carré sommable. On démontre sans peine que pour toute fonction $f(x)$ à carré sommable on a

$$f(\omega) = \int_{(\Omega)} k(\tau, \omega) \left(\int_{(\Omega)} k(\tau, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta \right) d\tau, \tag{11}$$

ainsi que

$$f(\tau) = \int_{(\Omega)} k(\tau, \omega) \left(\int_{(\Omega)} k(\zeta, \omega) f(\zeta)\, d\zeta \right) d\omega. \tag{12}$$

En effet, si

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(\omega); \tag{13}$$

on a $$\int_{(\Omega)} k(\tau, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau) \int_{(\Omega)} \psi_k(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\tau) \tag{14}$$

et

$$\int_{(\Omega)} k(\tau, \omega) \left(\int_{(\Omega)} k(\tau, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta \right) d\tau = \sum_{l=1}^{\infty} \psi_l(\omega) \left(\int_{(\Omega)} \varphi_l(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\tau) \right) d\tau =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \psi_l(\omega) \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{(\Omega)} \varphi_l(\tau) \varphi_k(\tau)\, d\tau \right) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \psi_l(\omega) = f(\omega). \tag{15}$$

En partant du développement

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(\omega) \tag{16}$$

on démontre de la même manière l'égalité (12).

On peut démontrer que la formule (11) donne tous les noyaux jouissant de la double propriété (11) et (12). Supposons que le noyau $k(\tau, \omega)$ est tel que pour toute fonction $f(x)$ à carré sommable dans (Ω) subsistent les égalités (11) et (12). En posant

$$f(x) = \delta(0, x), \tag{17}$$

où (θ) est un domaine arbitraire à mesure finie contenu dans (Ω) on vient aux égalités

$$\left.\begin{aligned}\int_{(\Omega)} k(\tau, \omega)\, k(\tau, \theta)\, d\tau = \delta(\theta, \omega),\\ \int_{(\Omega)} k(\tau, \omega)\, k(\theta, \omega)\, d\omega = \delta(\theta, \tau).\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

En posant dans (18) $(\theta) = (\omega)$ et $(\theta) = (\tau)$, on voit que le noyau $k(\tau, \omega)$ vérifie les deux équations

$$\int_{(\Omega)} k^2(\tau, \omega)\, d\tau = \frac{1}{\omega}, \quad \int_{(\Omega)} k^2(\tau, \omega)\, d\omega = \frac{1}{\tau}. \qquad (19)$$

En partant du système des équations (19) on démontre la proposition en reproduisant les raisonnements employés dans les par. 7—13. En effet, les égalités (18) montrent que pour deux domaines (τ) et (ω) sans points intérieurs communs on a

$$\int_{(\Omega)} k(\zeta, \omega)\, k(\zeta, \tau)\, d\zeta = 0, \quad \int_{(\Omega)} k(\tau, \zeta)\, k(\omega, \zeta)\, d\zeta = 0. \qquad (20)$$

Ces conditions d'orthogonalité permettent d'achever la démonstration du lemme 1 sans supposer que $k(\tau, \omega)$ est symétrique.

APPENDICE

1. Sur les intégrales de Hellinger

Nous allons démontrer les théorèmes énoncés dans le par. 3. Il en suffit de s'assurer que pour toute fonction $f(x)$ à carré sommable dans (Ω) on a

$$\int_{(\Omega^{(s)})} f^2(\tau)\, d\tau = \int_{(\Omega^{(s)})} f^2(y)\, d\tau, \quad \int_{(\Omega)} f^2(\tau)\, d\tau = \int_{(\Omega)} f^2(y)\, d\tau, \qquad (1)$$

où $(\Omega^{(s)})$ est un domaine à mesure finie appartenant à (Ω). En effet, l'application des égalités (1) à la fonction $f(x) + F(x)$ conduit immédiatement aux égalités du théorème.

Soit

$$(\tau_1),\ (\tau_2),\ \ldots,\ (\tau_n) \qquad (2)$$

une décomposition du domaine $(\Omega^{(s)})$ en domaines partiels.

Pour toute fonction $f(x)$ à carré sommable on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\left(\int_{(\tau_k)} f(x)\, d\omega\right)^2}{\tau_k} = \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k)\, \tau_k \leqslant \sum_{k=1}^{k=n} \int_{(\tau_k)} f^2(x)\, d\omega = \int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x)\, d\omega. \qquad (3)$$

D'autre part, la limite de

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} f(x)\, d\omega, \qquad (4)$$

qui existe presque partout, est égale [4] à $f(x)$ quand (ω), étant attaché au point (x), tend convenablement vers zéro. En définissant la loi de variation de (ω), il suffit d'envisager les intervalles (i), ayant pour centre le point (x), dont les arrêtes tendent vers zéro, et de supposer que, le domaine (ω) étant dans l'intérieur de (i), les mesures ω et i des domaines (ω) et (i) pendant leur variation vérifient l'inégalité:

$$\frac{\omega}{i} > \alpha, \tag{5}$$

où α est un nombre déterminé inférieur à l'unité.

Il en résulte que presque partout la limite de

$$\frac{\left(\int\limits_{(\omega)} f(x)\,d\omega\right)^2}{\omega \int\limits_{(\omega)} f^2(x)\,d\omega} \tag{6}$$

est égale à l'unité.

Soit (A) l'ensemble de points pour lesquels la limite de (6) est égale à l'unité. Comme la mesure de la frontière de $(\Omega^{(s)})$ est nulle, on peut supposer que l'ensemble (A) est contenu dans $(\Omega^{(s)})$. A chaque point (x) de l'ensemble (A) correspond une suite des domaines

$$\tau_1(x),\ \tau_2(x),\ \ldots,\ \tau_m(x),\ \ldots \tag{7}$$

attachés au point (x), tels que

$$\frac{\tau_m(x)}{i_m(x)} > \alpha, \tag{8}$$

i_m et α ayant la signification définie ci-dessus, et pour lesquels l'inégalité

$$\frac{1}{\tau_m}\left(\int\limits_{(\tau_m)} f(x)\,d\omega\right)^2 > \vartheta \int\limits_{(\tau_m)} f^2(x)\,d\omega \tag{9}$$

a lieu, le nombre $\vartheta < 1$ étant arbitraire. Les points de (A) étant des points intérieurs de $(\Omega^{(s)})$, on peut supposer que les intervalles $i_n(x)$, et par suite les domaines (7), appartiennent à $(\Omega^{(s)})$.

D'après le théorème de Vitali [5] on peut choisir parmi les domaines (7) des domaines

$$\tau_i' = \tau_{n_i}(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{10}$$

attachés aux points $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ de l'ensemble (A), et tels que, si

$$S = (\tau_1') + (\tau_2') + \ldots + (\tau_m') \tag{11}$$

---

[4] Pour la démonstration détaillée de cette proposition voir mon mémoire: «Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique», Travaux de l'Institut physico-mathématique Stekloff, **1**, 1932, pages 30—45.

[5] Voir C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 1918 (S. 288).

on a

$$m^*AS > \vartheta m^*A, \quad m^*(A - AS) < (1 - \vartheta)\, m^*A \tag{12}$$

où m^* désigne la mesure extérieure.

Si dans (2) n est suffisamment grand, la mesure totale de ceux des domaines (2) qui ont des points communs avec les frontières des domaines (10), ne depasse pas un nombre η aussi petit qu'on le veut.

Remarquons que la somme

$$\sum_{k=1}^{k=m} f^2(\tau_k)\, \tau_k \tag{13}$$

croît, quand on augmente le nombre des domaines (2) en les décomposant. En effet

$$f^2(\tau_1)\,\tau_1 + f^2(\tau_2)\,\tau_2 - f^2(\tau_1+\tau_2)(\tau_1+\tau_2) = \frac{[f(\tau_1) - f(\tau_2)]^2\,\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2} > 0. \tag{14}$$

Désignons par (τ'') un domaine (2) ayant un point commun avec la frontière d'un des domaines (10); cette frontière le divise en deux parties: (τ_1'') et (τ_2''). Supposons que (τ_1'') est intérieur au domaine τ_i' en question; soient

$$\sum{}'(\tau_k), \quad \sum(\tau''), \quad \sum{}''(\tau_k) \tag{15}$$

respectivement les sommes des domaines (2), situés à l'intérieur des domaines (10), des domaines (τ'') et des domaines (2) n'ayant pas de points communs avec les domaines (10). On a

$$\sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k)\,\tau_k = \sum{}' f^2(\tau_k)\,\tau_k + \sum f^2(\tau'')\,\tau'' + \sum{}'' f^2(\tau_k)\,\tau_k \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{k=m} f^2(\tau_k')\,\tau_k' < \sum{}' f^2(\tau_k)\,\tau_k + \sum f^2(\tau_1'')\,\tau_1''. \tag{17}$$

Or, si η est assez petit, on a

$$\sum f^2(\tau_1'')\,\tau_1'' < \sum \int_{(\tau_1'')} f^2(x)\, d\omega < \varepsilon. \tag{18}$$

Les domaines (10) étant choisis parmi les domaines (7), on a

$$\vartheta \sum_{k=1}^{k=m} \int_{(\tau_k')} f^2(x)\, d\omega < \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{\tau_k'} \left(\int_{(\tau_k')} f(x)\, d\omega \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m} f^2(\tau_k')\,\tau_k' < \sum{}' f^2(\tau_k)\,\tau_k + \sum f^2(\tau_1'')\,\tau_1'' =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k)\,\tau_k - \sum f^2(\tau'')\,\tau'' - \sum{}'' f^2(\tau_k)\,\tau_k +$$

$$+ \sum f^2(\tau_1'')\,\tau_1'' < \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k)\,\tau_k + \varepsilon; \tag{19}$$

quant au choix de ϑ, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{k=m}\int_{(\tau'_k)} f^2(x)\,d\omega - \sum_{i=1}^{i=n}\int_{(\tau_i)} f^2(x)\,d\omega\right| = \left|\int_{(S)} f^2(x)\,d\omega - \int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x)\,d\omega\right| =$$

$$= \left|\int_{(SA)} f^2(x)\,d\omega - \int_{(A)} f^2(x)\,d\omega\right| < \varepsilon, \tag{20}$$

car la mesure de l'ensemble $(A-AS)$ est aussi petit que l'on veut, si ϑ est assez voisin de l'unité, et presque tous les points de (S) appartiennent à (A), de même que tous les points de (S) à $(\Omega^{(s)})$.

Il résulte de tout ceci que l'on a

$$\vartheta \int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x)\,d\omega < \vartheta \sum_{k=1}^{k=m}\int_{(\tau'_k)} f^2(x)\,d\omega + \vartheta\varepsilon < \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k)\,\tau_k + \vartheta\varepsilon + \varepsilon \tag{21}$$

c'est-à-dire, que

$$(1-\varepsilon)\int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x)\,d\omega - 2\varepsilon < \sum_{k=1}^{k=n} f^2(\tau_k)\,\tau_k < \int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x)\,d\omega \tag{22}$$

en prenant ϑ assez grand pour qu'on ait

$$1-\vartheta < \varepsilon, \quad 1-\varepsilon < \vartheta. \tag{23}$$

Il en résulte que la somme (3) a une limite, quand $n \to \infty$ et que

$$\int_{(\Omega^{(s)})} f^2(\tau)\,d\tau = \int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x)\,d\omega. \tag{24}$$

En supposant que $(\Omega^{(s)})$ tend vers (Ω), on trouve

$$\lim \int_{(\Omega^{(s)})} f^2(\tau)\,d\tau = \int_{(\Omega)} f^2(\tau)\,d\tau = \int_{(\Omega)} f^2(x)\,d\omega, \tag{25}$$

car on a

$$\int_{(\Omega)} f^2(x)\,d\omega = \lim \int_{(\Omega)} f_s^2(x)\,d\omega = \lim \int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x)\,d\omega \tag{26}$$

où $f_s(x) = f(x)$ à l'intérieur de $(\Omega^{(s)})$, et $f_s(x) = 0$ partout ailleurs $f_s^2(x)$ croissant de façon monotone quand $s \to \infty$.

Si $\Phi(\tau)$ est la valeur moyenne de $|f(x)|$, on voit que

$$\int_{(\Omega)} f^2(\tau)\,d\tau = \int_{(\Omega)} f^2(x)\,d\omega = \int_{(\Omega)} |f(x)|^2\,d\omega = \int_{(\Omega)} \Phi^2(\tau)\,d\tau. \tag{27}$$

Il est facile de démontrer que, si $f(x)$ est une fonction sommable, $\Phi(\tau)$ est la variation de $f(\tau)$ dans (τ), c'est-à-dire la borne supérieure des sommes

$$|f(\tau_1)|\,\tau_1 + \ldots + |f(\tau_n)|\,\tau_n\,; \tag{28}$$

$(\tau_1), (\tau_2), \ldots, (\tau_n)$ formant une décomposition quelconque du domaine (τ) en domaines partiels.

En effet, la somme (28) est évidemment inférieure à

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_{(\tau_k)} |f(x)|\, d\omega = \int_{(\tau)} |f(x)|\, d\omega. \tag{29}$$

D'autre part, la limite de

$$\frac{|f(\tau)|}{\Phi(\tau)} \tag{30}$$

est presque partout égale à l'unité, quand (τ) tend vers zéro convenablement suivant la règle décrite ci-dessus.

Si (A) est un ensemble de points, intérieurs à (τ), pour lesquels la limite de (30) est égale à l'unité, alors à chaque point (x) de (A) correspond une suite de domaines (7), appartenant à (τ), tels que l'inégalité (8) a lieu et que de plus l'inégalité

$$\left| \int_{(\tau_k)} f(x)\, d\omega \right| > \vartheta . \int_{(\tau_k)} |f(x)|\, d\omega \tag{31}$$

est vérifiée, le nombre $\vartheta < 1$ étant arbitraire.

On peut donc choisir d'après le théorème de Vitali parmi les domaines (7) un certain nombre de domaines (10), attachés aux divers points de l'ensemble (A), tels que la somme (11) vérifie les inégalités (12), cette fois la mesure de (A) ne depassant pas (τ).

Il en résulte, premièrement, que

$$\sum_{i=1}^{i=m} \int_{(\tau_i')} |f(x)|\, d\omega - \int_{(\tau)} |f(x)|\, d\omega = \left| \int_{(SA)} |f(x)|\, d\omega - \int_{(A)} |f(x)|\, d\omega \right| < \varepsilon, \tag{32}$$

si ϑ est assez voisin de l'unité et, deuxiemement, que

$$\vartheta \sum_{i=1}^{i=m} \int_{(\tau_i')} |f(x)|\, d\omega < \sum_{i=1}^{i=m} \left| \int_{(\tau_i')} f(x)\, d\omega \right| = \sum_{i=1}^{i=m} |f(\tau_i')|\, \tau_i' < \sum |f(\tau_i'')|\, \tau_i'', \tag{33}$$

l'ensemble de domaines (τ_i'') formant une division de (τ) en domaines partiels tenant tous les domaines (10).

Les inégalités (32) et (33) conduisent à l'inégalité

$$\vartheta \int_{(\tau)} |f(x)|\, d\omega - \varepsilon\vartheta < \sum |f(\tau_i'')|\, \tau_i'' \tag{34}$$

qui montre que la borne supérieure des sommes (28) ne peut être inférieure à (29), ce qu'il fallait démontrer.

On peut démontrer maintenant le théorème énoncé a la fin du par. 3. Nous le démontrerons en lui donnant une forme plus générale et plus commode pour les applications que nous avons en vue.

Supposons que pour tout $(\Omega^{(s)})$ à mesure finie, contenu dans (Ω) et pour n'importe quelle décomposition de $(\Omega^{(s)})$ en domaines partiels (τ_1), (τ_2), ..., (τ_n), les sommes

$$\sum_{i=1}^{i=n} |f(\tau_i)|^2\, \tau_i \tag{35}$$

sont uniformément bornées par une constante K, $f(\tau)$ étant une fonction moyenne additive et à variation bornée dans tout domaine $(\Omega^{(s)})$.

Dans ce cas $f(\tau)$ est la valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ à carré sommable dans (Ω). Le théorème est évidemment satisfait lorsque l'intégrale

$$\int_{(\Omega)} f^2(\tau)\, d\tau \tag{36}$$

a un sens et, inversement, le théorème étant exact, l'intégrale (36) existe certainement.

Remarquons que si l'on divise les domaines disjoints (τ), (τ'), (τ''), ... en portions (τ_1), (τ_2), ..., (τ_m) et si l'on trouve, en formant les sommes (35), des bornes supérieures K_τ, $K_{\tau'}$, $K_{\tau''}$, ..., on a évidemment

$$K_\tau + K_{\tau'} + K_{\tau''} + \dots < K. \tag{37}$$

Divisons le domaine (τ) en domaines partiels (τ_1), ..., (τ_m). On a

$$\sum_{i=1}^{i=n} |f(\tau_i)|\, \tau_i = \sum_{i=1}^{i=n} |f(\tau_i)| \sqrt{\tau_i}\sqrt{\tau_i} <$$
$$< \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} |f(\tau_i)|^2 \tau_i} \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i} < \sqrt{K_\tau}\sqrt{\tau}. \tag{38}$$

On en conclut que

$$\Phi(\tau)\tau \leqslant \sqrt{K_\tau}\sqrt{\tau} < \sqrt{K} \cdot \sqrt{\tau}, \tag{39}$$

$\Phi(\tau)$ étant la variation moyenne de $f(\tau)$. Comme, si τ est inférieur à un nombre donné η, la variation totale $\Phi(\tau)\tau$ est d'après (39) inférieure à un nombre donné ε, $f(\tau)$ est absolument continue et par suite $f(\tau)$ est égale à la valeur moyenne d'une fonction sommable $f(x)$ [6].

Il reste a démontrer que la fonction $f(x)$ est à carré sommable.

Or, si $f_n(x)$ est égale à $|f(x)|$ quand $|f(x)|$ ne dépasse pas n et à n quand cela n'a pas lieu et si $\Phi_n(\tau)$ est la valeur moyenne de $f_n(x)|$, on a

$$\int_{(\Omega^{(s)})} |f_n(x)|^2 d\omega = \int_{(\Omega^{(s)})} \Phi_n^2(\tau)\, d\tau = \lim \sum \Phi_n^2(\tau_k)\,\tau_k < \sum K_{\tau_k} < K_{\Omega^{(s)}} \tag{40}$$

car suivant l'inégalité (39)

$$\Phi_n(\tau_k) < \sqrt{K_{\tau_k}} \frac{1}{\sqrt{\tau_k}}, \quad \Phi_n^2(\tau_k)\,\tau_k < K_{\tau_k}. \tag{41}$$

---

[6] Voir mon mémoire (page 24) cité dans la note 4.

On a donc par conséquent

$$\int_{(\Omega^{(s)})} |f_n(x)|^2 \, d\omega < K; \tag{42}$$

le premier membre de (42) converge si $n \to \infty$, et on a

$$\int_{(\Omega^{(s)})} f^2(x) \, d\omega < K; \tag{43}$$

quand $s \to \infty$, le premier membre de (43) croît de façon monotone, et il converge de même; on trouve

$$\int_{(\Omega)} |f(x)|^2 d\omega = \int_{(\Omega)} f^2(x) \, d\omega < K. \tag{44}$$

2. Le théorème de Stekloff

Soit donnée une suite

$$\{\psi_k(x)\} \tag{1}$$

orthogonale, normée et fermée dans (Ω).

Gardons la notation du par. 4. Nous posons, $f(x)$ étant à carré sommable dans (Ω),

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \psi_k(x) + R_n(x); \tag{2}$$

on a

$$f(\tau) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \psi_k(\tau) = R_n(\tau). \tag{3}$$

Mais

$$|R_n(\tau)| = \frac{1}{\tau} \left| \int_{(\tau)} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \psi_k(x) \right) d\omega \right| <$$

$$< \frac{1}{\tau} \sqrt{\int_{(\tau)} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k \psi_k(x) \right)^2 d\omega} \sqrt{\tau} <$$

$$< \sqrt{\frac{1}{\tau}} \sqrt{\int_{(\Omega)} f^2(x) \, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} c_k^2} \to 0 \text{ si } n \to \infty. \tag{4}$$

D'où

$$f(\tau) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{k=n} c_k \psi_k(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(\tau). \tag{5}$$

Si $F(\tau)$ est la valeur moyenne d'une fonction à carré sommable, on peut intégrer la série (5) terme à terme dans le sens des intégrales de Hellinger après multiplication par $F(\tau)$. En effet, soit

(Δ) un domaine contenu dans (Ω) ou éventuellement le domaine (Ω) lui même. Alors

$$\int_{(\Delta)} f(\tau)\,F(\tau)\,d\tau = \int_{(\Delta)} f(x)\,F(x)\,d\tau = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \int_{(\Omega)} F(\tau)\,\psi_k(\tau)\,d\tau + \\ + \int_{(\Delta)} F(\tau)\,R_n(\tau)\,d\tau\,. \tag{6}$$

Mais

$$\left|\int_{(\Delta)} F(\tau) R_n(\tau)\,d\tau\right| < \sqrt{\int_{(\Delta)} F^2(\tau)\,d\tau}\,\sqrt{\int_{(\Delta)} R_n^2(\tau)\,d\tau} < \\ < \sqrt{\int_{(\Delta)} F^2(x)\,d\omega}\,\sqrt{\int_{(\Omega)} R_n^2(x)\,d\omega}\,, \tag{7}$$

d'où il résulte que le terme complémentaire de (6) tend vers zéro, la suite (1) étant fermée.

3. Généralisation des théorèmes de Stekloff

Supposons que la suite

$$\{\psi_k(x)\} \tag{1}$$

de fonctions $\psi_k(x)$ à carré sommable dans (Ω) est orthogonale et normée, étant fermée ou non, et envisageons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\psi_k(\omega), \tag{2}$$

dans laquelle les coefficients c_k sont tels que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = C \tag{3}$$

est convergente.

Nous démontrerons que la somme de la série (2) est la valeur moyenne d'une fonction à carré sommable dans (Ω).

Désignons par $r_n(\omega)$ le reste de la série (2). Nous démontrerons tout d'abord que $r_n(\omega)$ est la valeur moyenne d'une fonction sommable.

Soit (Δ) un domaine à mesure finie contenu dans (Ω); décomposons le en domaines partiels (τ_1), (τ_2), ..., (τ_m) et considérons la fonction

$$\sum_{s=1}^{s=m} \gamma_s\,\delta(\tau_s, x)\,\tau_s \tag{4}$$

où γ_s sont des constantes, telles que $|\gamma_s| = 1$; les coefficients de Fourier de cette fonction sont

$$a_k = \int_{(\Omega)} \left(\sum_{s=1}^{s=m}{}' \gamma_s\,\delta(\tau_s, x)\,\tau_s\right) \psi_k(x)\,d\omega = \sum_{s=1}^{s=m} \gamma_s \psi_k(\tau_s)\tau_s \tag{5}$$

et on a

$$\sum_1^\infty a_k^2 < \int_{(\Omega)} \Big(\sum_{s=1}^{s=m} \gamma_s \delta(\tau_s, x) \tau_s \Big)^2 d\omega < \int_{(\Omega)} \Big(\sum_{s=1}^{s=m} \delta(\tau_s, x) \tau_s \Big)^2 d\omega =$$

$$= \int_{(\Omega)} \delta^2(\Delta, x) \Delta^2 d\omega = \Delta. \tag{6}$$

Le terme complémentaire ρ_n de la série

$$\sum_1^\infty c_k a_k \tag{7}$$

ne dépasse donc pas

$$|\rho_n| < \sqrt{\sum_n^\infty c_k{}^2 \sum_n^\infty a_k^2} < \sqrt{\sum_n^\infty c_k^2}\, \sqrt{\Delta}\,. \tag{8}$$

D'autre part, vu l'égalité (5), nous avons

$$\rho_n = \sum_{k=n}^\infty c_k \Big(\sum_{s=1}^{s=m} \gamma_s \psi_k(\tau_s) \tau_s \Big) = \sum_{s=1}^{s=m} \gamma_s \Big(\sum_{k=n}^\infty c_k \psi_k(\tau_s) \tau_s \Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{s=m} \gamma_s r_n(\tau_s) \tau_s\,. \tag{9}$$

En choisissant pour γ_s la valeur

$$\gamma_s = \frac{|r_n(\tau_s)|}{r_n(\tau_s)}\,, \tag{10}$$

nous trouvons

$$\sum_{s=1}^{s=m} |r_n(\tau_s)|\, \tau_s^2 < \sqrt{\sum_n^\infty c_k^2}\, \sqrt{\Delta}\,, \tag{11}$$

ce qui montre que la variation de $r_n(\tau)$ dans (Δ) ne dépasse pas la valeur du second membre de (11) et que quel que soit ε, on peut la rendre inférieure à ε indépendamment de n et de la situation du domaine (Δ), si la mesure de (Δ) ne dépasse pas un nombre fixe η.

Cela prouve que $r_n(\tau)$ est pour tout n absolument continu; à cause de cela $r_n(\omega)$ est la valeur moyenne d'une fonction sommable dans tout domaine $(\Omega^{(s)})$ à étendue finie contenu dans (Ω).

La somme de la série (2) est par suite la valeur moyenne d'une fonction sommable; désignons cette fonction par $g(x)$.

Il reste à demontrer que $g(x)$ est à carré sommable dans (Ω).

Soit $(\Omega^{(s)})$ un domaine contenu dans (Ω); divisons le en domaines partiels (ω_1), (ω_2), ..., (ω_m). On a

$$\sum_{i=1}^{i=m} g^2(\omega_i)\, \omega_i = \sum_{i=1}^{i=m} \Big(\sum_{k=1}^\infty c_k \psi_k(\omega_i) \Big)^2 \omega_i\,. \tag{12}$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{i=m}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_k\psi_k(\omega_i)\Big)^2\omega_i < \int_{(\Omega(s))}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_k\psi_k(\omega)\Big)^2 d\omega <$$

$$< \int_{(\Omega)}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_k\,\psi_k(\omega)\Big)^2 d\omega = \sum_{k=1}^{k=n} c_k^2 < \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 . \tag{13}$$

On en conclut que pour tout $(\Omega^{(s)})$ et pour une décomposition quelconque de $(\Omega^{(s)})$ en domaines partiels, on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} g^2(\omega_i)\,\omega_i < \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = C \tag{14}$$

d'où il résulte d'après le dernier théorème de l'Appendice 1, que $g(x)$ est à carré sommable dans (Ω).

En s'appuyant sur l'inégalité (11) il est aisé de démontrer qu'on peut intégrer la série (2) terme à terme en sens des intégrales de Hellinger après l'avoir multipliée par la valeur moyenne $f(\tau)$ d'une fonction $f(x)$ à carré sommable dans (Ω).

En effet, l'intégrale

$$\int_{(\Omega)} r_n^2(\omega)\,d\omega \tag{15}$$

est bornée indépendamment du choix de n. On a

$$\int_{(\Omega)} r_n^2(\omega)\,d\omega = \int_{(\Omega)}\Big[g(\omega) - \sum_{k=1}^{k=n} c_k\,\psi_k(\omega)\Big]^2 d\omega =$$

$$= \int_{(\Omega)} g^2(x)\,d\omega - 2\sum_{k=1}^{k=n} c_k \int_{(\Omega)} g(x)\,\psi_k(x)\,d\omega + \int_{(\Omega)}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_k\,\psi_k(x)\Big)^2 d\omega . \tag{16}$$

Mais

$$\Big|\sum_{k=1}^{k=n} c_k \int_{(\Omega)} g(x)\,\psi_k(x)\,d\omega\Big| < \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} c_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}\Big(\int_{(\Omega)} g(x)\,\psi_k(x)\,d\omega\Big)^2} <$$

$$< \sqrt{C}\sqrt{\int_{(\Omega)} g^2(x)\,d\omega}\,, \tag{17}$$

le carré du second membre de (12) étant égal à la somme des carrés des coefficients de Fourier. On a donc pour n quelconque

$$\int_{(\Omega)} r_n^2(\omega)\,d\omega < \Big(\sqrt{\int_{(\Omega)} g^2(x)\,d\omega} + \sqrt{C}\Big)^2 = K. \tag{18}$$

Soit $(\Omega^{(s)})$ un domaine tendant vers (Ω) quand $s \to \infty$; désignons par $(\Delta^{(s)})$ le domaine $(\Omega - \Omega^{(s)})$. On a

$$\Big|\int_{(\Delta^{(s)})} r_n(\omega)\,f(\omega)\,d\omega\Big| = \Big|\int_{(\Delta^{(s)})} r_n(x)\,f(x)\,d\omega\Big| <$$

$$< \sqrt{\int_{(\Delta^{(s)})} r_n^2(x)\, d\omega} \sqrt{\int_{(\Delta^{(s)})} f^2(x)\, d\omega} <$$

$$< \sqrt{\int_{(\Omega)} r_n^2(\omega)\, d\omega} \sqrt{\int_{(\Delta^{(s)})} f^2(x)\, d\omega} < \sqrt{K} \sqrt{\int_{(\Delta^{(s)})} f^2(x)\, d\omega}. \tag{19}$$

Or, la fonction $f(x)$ étant à carré sommable, la limite du carré du second facteur dans (19) est égale à zéro quand $s \to \infty$ et, quel que soit ε, on a pour s assez grand

$$\left| \int_{(\Delta^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega)\, d\omega \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{20}$$

l'inégalité étant indépendante du choix de n.

Si la fonction $f(x)$ reste bornée dans $(\Omega^{(s)})$ et ne dépasse pas en valeur absolue le nombre M, l'inégalité (11) conduit à l'inégalité

$$\left| \int_{(\Omega^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega)\, d\omega \right| < M \int_{(\Omega^{(s)})} R_n(\omega)\, d\omega < M \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2} \sqrt{\Omega^{(s)}}; \tag{21}$$

$R_n(\omega)$ est la variation moyenne de $r_n(\omega)$, ce qui montre que, si n dépasse un nombre N, on a

$$\left| \int_{(\Omega^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega)\, d\omega \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{22}$$

d'où pour $n \geqslant N$

$$\left| \int_{(\Omega)} r_n(\omega) f(\omega)\, d\omega \right| = \left| \int_{(\Omega^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega)\, d\omega + \int_{(\Delta^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega)\, d\omega \right| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{23}$$

Supposons maintenant que $f(x)$ n'est pas bornée dans $(\Omega^{(s)})$. Désignons par (E_m) l'ensemble de points de $(\Omega^{(s)})$ pour lesquels

$$|f(x)| \geqslant m. \tag{24}$$

La fonction $|f(x)|$ étant sommable dans $(\Omega^{(s)})$, la mesure de (E_m) tend vers zéro quand $m \to \infty$. Il en résulte que la limite de

$$\int_{(E_m)} |f(x)|^2\, d\omega \tag{25}$$

est égale à zéro, quand $m \to \infty$. Comme on a

$$\left| \int_{(E_m)} r_n(x) f(x)\, d\omega \right| < \sqrt{\int_{(E_m)} r_n^2(x)\, d\omega} \sqrt{\int_{(E_m)} f^2(x)\, d\omega} <$$

$$< \sqrt{\int_{(\Omega)} r_n^2(x)\, d\omega} \sqrt{\int_{(E_m)} f^2(x)\, d\omega} < \sqrt{K} \sqrt{\int_{(E_m)} f^2(x)\, d\omega}, \tag{26}$$

si m est assez grand, le premier membre de (26) ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{3}$ quel que soit n. On a enfin

$$\left| \int_{(\Omega^{(s)} - E_m)} r_n(x) f(x)\, d\omega \right| < m \int_{(\Omega^{(s)} - E_m)} |r_n(x)|\, d\omega < m \int_{(\Omega^{(s)})} |r_n(x)|\, d\omega =$$

$$= mR_n(\Omega^{(s)})\Omega^{(s)} < m\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2}\sqrt{\Omega^{(s)}} \tag{27}$$

et par suite le premier membre de (27) ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{3}$ si n est assez grand.

En combinant toutes ces inégalités, on voit que, si $n \geqslant N$,

$$\left|\int_{(\Omega)} r_n(\omega) f(\omega) d\omega\right| = \left|\int_{(\Omega^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega) d\omega + \int_{(\Delta^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega) d\omega\right| = \tag{28}$$

$$= \left|\int_{(\Omega^{(s)})} r_n(x) f(x) d\omega + \int_{(\Delta^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega) d\omega\right| = \left|\int_{(\Omega^{(s)} - E_m)} r_n(x) f(x) d\omega + \right.$$

$$\left. + \int_{(E_m)} r_n(x) f(x) d\omega + \int_{(\Delta^{(s)})} r_n(\omega) f(\omega) d\omega\right| < \varepsilon$$

ce qui prouve le théorème.

L'égalité

$$g(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(\omega) \tag{29}$$

étant intégrable terme à terme après multiplication par la valeur moyenne d'une fonction à carré sommable, on en conclut que

$$\int_{(\Omega)} g(x) \psi_k(x) d\omega = c_k, \tag{30}$$

c'est-à-dire que les coefficients c_k sont les coefficients de Fourier de la fonction $g(x)$. D'après quoi, prenant en considération l'inégalité (14), on a pour la fonction $g(x)$

$$\int_{(\Omega)} g^2(x) d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{31}$$

4. Sur les suites fermées[7]

Si la suite de fonctions à carré sommable dans (Ω)

$$\{\psi_k(x)\} \tag{1}$$

est orthogonale, normée et fermée, l'application du théorème de Stekloff à la fonction $\delta(\tau, x)$, dans laquelle (τ) est un domaine à mesure finie, conduit à l'égalité

$$\delta(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau) \psi_k(\omega), \tag{2}$$

car on a

$$\int_{(\Omega)} \delta(\tau, x) \psi_k(x) d\omega = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} \psi_k(x) d\omega = \psi_k(\tau). \tag{3}$$

---

[7] Pour les domaines (Ω) à dimension finie le théorème de cet Appendice est démontré dans ma note «Sur la théorie de fermeture», Rendiconti del Circolo di Palermo, t. LX, 1936.

En posant $(\omega) = (\tau)$, on trouve que pour chaque (τ) à mesure finie contenu dans (Ω) l'égalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(\tau) = \delta(\tau, \tau) = \frac{1}{\tau} \tag{4}$$

est vérifiée.

L'égalité (4) est donc la condition nécessaire pour que la suite (1) soit fermée.

On démontre aisément qu'elle est aussi suffisante.

Supposons qu'elle soit satisfaite pour une certaine suite (1) orthogonale et normée. En posant dans (4) $(\tau) = (\tau_1) + (\tau_2)$, (τ_1) et (τ_2) étant deux domaines adjacents, on obtient

$$\psi_k(\tau_1 + \tau_2)\,(\tau_1 + \tau_2) = \psi_k(\tau_1)\,\tau_1 + \psi_k(\tau_2)\,\tau_2 \tag{5}$$

et l'on voit que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(\tau_1)\,\tau_1^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau_2)\,\tau_2^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau_1)\,\psi_k(\tau_2)\,\tau_1\tau_2 = \tau_1 + \tau_2\,, \tag{6}$$

et d'après (4):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau_1)\,\psi_k(\tau_2) = 0 = \delta(\tau_1, \tau_2). \tag{7}$$

L'égalité (7) est valable de même pour chaque paire de domaines (τ_1) et (τ_2) sans points intérieurs communs; pour s'en rendre compte il suffit d'intercaler un domaine (τ_3) de manière que les domaines (τ_1) et $(\tau_2 + \tau_3)$ soient adjacents.

Enfin, si les domaines (τ) et (ω) sont arbitraires, alors vu que

$$(\tau) = (\tau - [\omega\tau]) + [\omega\tau], \quad (\omega) = (\omega - [\omega\tau]) + [\omega\tau]\,, \tag{8}$$

$[\omega\tau]$ étant la partie commune des domaines (ω) et (τ), on trouvera

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau)\,\psi_k(\omega)\,\tau\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k([\omega\tau])\,\psi_k(\omega)\,[\omega\tau]\,\omega$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2([\omega\tau])\,[\omega\tau]^2 = [\omega, \tau] = \delta(\tau, \omega)\,\tau\omega, \tag{9}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau)\,\psi_k(\omega) = \delta(\tau, \omega)\,. \tag{10}$$

Soit $f(x)$ une fonction à carré sommable dans (Ω). En multipliant la série (10) par $f(\omega)$ et en intégrant terme à terme, on trouve d'après les théorèmes de l'Appendice 3:

$$\int_{(\Omega)} \delta(\tau, \omega)\,f(\omega)\,d\omega = f(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau) \int_{(\Omega)} \psi_k(\omega)\,f(\omega)\,d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\psi_k(\tau) \tag{11}$$

a_k étant les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$.

En multipliant la série (11) par $f(\tau)$ et en l'intégrant terme à terme, on obtient par une nouvelle application de ces théorèmes

$$\int_{(\Omega)} f^2(\tau)\,d\tau = \int_{(\Omega)} f^2(x)\,d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{(\Omega)} \psi_k(\tau) f(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\,; \qquad (12)$$

l'égalité de fermeture étant valable pour toute fonction à carré sommable dans (Ω), la condition (4) est suffisante pour la fermeture, c. q. f. d.

5. Démonstration de l'égalité du par. 13

Si les éléments de la matrice

$$\| c_s^{(k)} \| \qquad (1)$$

sont liés par les égalités

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} c_s^{(l)} = 0,\ k \neq l, \quad \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)^2} = 1 \qquad (2)$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{k} c_\sigma^{(k)} = 0, s \neq \sigma, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)^2} = 1 \qquad (3)$$

et si la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \qquad (4)$$

converge, on a

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} a_k \Big)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\,. \qquad (5)$$

Les égalités (3) et la convergence de la série (4) assurent la convergence des séries:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} a_k, \quad s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (6)$$

Nous avons tout d'abord, pour tout $n \geqslant 1$, $m > n$,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=n}^{k=m} c_s^{(k)} a_k \Big)^2 = \sum_{k=n}^{k=m} a_k^2 < A\,, \qquad (7)$$

A étant un nombre ne dépassant pas la somme de la série (4). A plus forte raison, on a

$$\sum_{s=1}^{s=M} \Big(\sum_{k=n}^{k=m} c_s^{(k)} a_k \Big)^2 < A \qquad (8)$$

d'après quoi l'inégalité (8) étant valable pour tout m,

$$\sum_{s=1}^{s=M}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)^2 \leqslant A \tag{9}$$

et l'on a

$$\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)^2 \leqslant A, \tag{10}$$

indépendamment du choix de n.

Quand $n \geqslant N$, N étant convenablement choisi, on a pour tout $m > n$

$$\sum_{k=n}^{k=m} a_k^2 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 < \varepsilon\,. \tag{11}$$

On peut donc poser dans ce cas $A = \varepsilon$. L'inégalité (10) prenant la forme

$$\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)^2 < \varepsilon \text{ si } n \geqslant N \tag{12}$$

prouve que le premier membre de (12) a zéro pour limite quand $n \to \infty$. On en conclut que

$$\lim \sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\Big)^2 = \sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)^2. \tag{13}$$

En effet

$$\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)^2 = \sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k + \sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)^2 =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\Big)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)^2 +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\Big)\Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big). \tag{14}$$

Mais on voit que

$$\Big|\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\Big)\Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)\Big| <$$

$$< \sqrt{\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\Big)^2}\sqrt{\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\Big)^2} < \sqrt{A}\sqrt{\varepsilon} \tag{15}$$

si $n \geqslant N$. D'où, si $n \geqslant N$,

$$\left|\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\right)^2 - \sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\right)^2\right| < \varepsilon + 2\sqrt{A}\sqrt{\varepsilon}, \tag{16}$$

ce qui prouve l'égalité (13).

Comme la limite de

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} a_k^2 \tag{17}$$

est égale à

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \tag{18}$$

l'égalité (4) est démontrée.

Si nous supposons que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \tag{19}$$

est convergente, on peut intervertir l'ordre de sommation dans la série

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\right) b_s. \tag{20}$$

En effet on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} b_s\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} a_k\left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} b_s\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\infty} b_s\left(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\right). \tag{21}$$

Or

$$\left|\sum_{s=1}^{\infty} b_s\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\right) - \sum_{s=1}^{\infty} b_s\left(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\right)\right| = \left|\sum_{s=1}^{\infty} b_s\left(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\right)\right| <$$

$$< \sqrt{\sum_{s=1}^{\infty} b_s^2}\sqrt{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\right)^2}, \tag{22}$$

le second facteur étant infiniment petit d'après (12). Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} b_s\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\infty} b_s\left(\sum_{k=1}^{k=n} c_s^{(k)} a_k\right) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} a_k\right). \tag{23}$$

Institut de mathématiques et de mécanique
de l'Université à Léningrad.

Reçu 1. XII. 1936.

Н. ГЮНТЕР. О ЯДРАХ ТИПА ФУРЬЕ

РЕЗЮМЕ

Обозначим через $f(\omega)$ среднее значение суммируемой функции $f(x)$ для области (ω)

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{(\omega)} f(x)\, d\omega,$$

где ω мера области (ω).

Положим, 1) что функция $k(\tau, x)$ от областей (τ) и точек (x), если мера (τ) ограничена, — с суммируемым квадратом, как функция от (x) в области (Ω), и 2) что функция $k(\tau, \omega)$, если мера (ω) ограничена, — аддитивная и ограниченной вариации, как функция от (τ) во всякой области с ограниченной мерой, принадлежащей (Ω).

Мы будем говорить, что $k(\tau, x)$ ядро Фурье, если соблюдены два условия:

a) $$k(\tau, \omega) = k(\omega, \tau),$$

b) $$\int\limits_{(\Omega)} k^2(\tau, x)\, d\omega = \frac{1}{\tau}.$$

В статье доказаны теоремы:

I. Если $k(\tau, x)$ ядро Фурье, то какова бы ни была функция $f(x)$ с суммируемым квадратом в (Ω), интеграл

A) $$\int\limits_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega$$

равен среднему для области (τ) некоторой функции $g(x)$ с суммируемым квадратом в (Ω);

B) $$\text{если } g(\tau) = \int\limits_{(\Omega)} k(\tau, x) f(x)\, d\omega,$$

$$\text{то } f(\omega) = \int\limits_{(\Omega)} k(\omega, y)\, g(y)\, d\tau;$$

C) $$\int\limits_{(\Omega)} f^2(x)\, d\omega = \int\limits_{(\Omega)} g^2(x)\, d\omega,$$

и обратно, если $k(\tau, x)$ таково, что соблюдены условия (a), (A) и (B), то соблюдено условие (b).

II. Если $k(\tau, x)$ ядро Фурье, то, выбрав каким-нибудь образом последовательность

$$\{\psi_k(x)\} \tag{1}$$

функций с суммируемым в (Ω) квадратом, ортогональную, нормированную и замкнутую, имеем

$$k(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} \psi_s(\tau) \right) \psi_k(\omega), \tag{2}$$

где

$$\left\| c_s^{(k)} \right\| \tag{3}$$

единичная симметричная матрица, т. е. такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_s^{(k)} c_\sigma^{(k)} = 0, \ s \neq \sigma; = 1, \ s = \sigma; \ c_s^{(k)} = c_k^{(s)}, \tag{4}$$

и обратно, если $c_s^{(k)}$ элементы такой матрицы, то сумма ряда (2), которая всегда—среднее значение некоторой функции $k(\tau, x)$ с суммируемым в (Ω) квадратом, есть среднее ядра Фурье.

Доказательство теорем основано на некоторых следствиях теоремы Стеклова о разложении средних значений функций с суммируемым квадратом по средним значениям функций последовательности (1) и на некоторых свойствах интегралов Hellinger'а разобранных в дополнении к работе.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

А. Н. КОЛМОГОРОВ

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛОВ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Дается, при некоторых схематических, но все же довольно общих предположениях, строгое решение задачи о скорости течения процесса кристаллизации.

Для металлургии имеет существенное значение изучение процента роста кристаллов при случайном образовании центров кристаллизации. Известные затруднения представляет при этом учет столкновений зерен кристаллического вещества, возникающих вокруг отдельных центров кристаллизации. Эти столкновения нарушают правильную форму зерен, прекращая их рост в некоторых направлениях. Опубликованные до настоящего времени работы F. Göler'a и G. Sachs'a (1), G. Tammann'a (2), Б. В. Старка, И. Л. Миркина и А. Н. Романовского (3) и других дают лишь грубо приближенные формулы для роста кристаллической массы. В настоящей заметке я даю при некоторых довольно широких допущениях точную формулу для вероятности $p(t)$, с которой наудачу выбранная точка P объема, заполненного подлежащим кристаллизации веществом, попадет в течение промежутка кристаллизации внутрь уже закристаллизовавшейся массы. С вполне достаточным приближением можно считать, что доля вещества, закристаллизовавшегося за промежуток времени t, также равна $p(t)$. В заключение я определяю число центров кристаллизации, образующихся в течение всего процесса кристаллизации.

Пользуюсь случаем выразить мою благодарность И. Л. Миркину, заинтересовавшему меня решаемой здесь задачей и любезно предоставившему все нужные материалы.

§ 1. Математическая постановка задачи

Дан некоторый объем V. В начале ($t = 0$) он весь занят «маточной фазой». Через промежуток времени t некоторая часть $V_1(t)$ объема V занимается кристаллизовавшимся веществом. Рост объема $V_1(t)$ со временем t совершается следующим образом:

1. В свободной части $V - V_1$ объема V возникают новые центры кристаллизации. При этом для любого объема $V' < V - V_1$ вероятность образования в этом объеме за промежуток времени между t и $t + \Delta t$ *одного* центра кристаллизации равна

$$\alpha(t) V' \Delta t + o(\Delta t),$$

а *более чем одного* центра равна $o(\Delta t)$, где $o(\Delta t)$ обозначает величину бесконечно малую по сравнению с Δt. Вероятности эти не зависят от распределения центров кристаллизации, образовавшихся раньше момента t, если только оно гарантирует (см. далее) свободу объема V' от кристаллической массы к моменту t.

2. Вокруг новообразованных центров кристаллизации и вокруг всей закристаллизованной массы происходит нарастание этой массы с линейной скоростью

$$c(t, n) = k(t) \cdot c(n),$$

зависящей от времени t и направления n. Предполагаем, что концы векторов длины $c(n)$, отложенных в направлении n из начала координат, образуют выпуклую поверхность.

В изложенных условиях существенным ограничением является то, что линейная скорость роста $c(t, n)$ хотя и может зависеть от направления n, но зависимость эта во всех точках должна быть одной и той же. Иначе говоря, выводимые далее формулы справедливы или при упрощенном предположении равномерного роста во всех направлениях, или для случая одинаково ориентированных в пространстве кристаллов произвольной формы.

§ 2. Определение вероятности $p(t)$

Введем величину c, определяемую равенством

$$c^3 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S c^3(n)\, d\sigma,$$

где интегрирование производится по поверхности единичной сферы S с центром в начале координат. Очевидно, объем кристалла, растущего свободно вокруг центра, образовавшегося в момент времени t_0, достигнет к моменту $t > t_0$ величины

$$\frac{4\pi}{3} c^3 \left(\int\limits_{t_0}^{t} k(\tau)\, d\tau \right)^3.$$

Рассмотрим теперь произвольную точку P объема V, лежащую на расстоянии большем

$$\max c(n) \int\limits_{t_0}^{t} k(\tau)\, d\tau$$

от краев объема V.

Для того чтобы точка P попала внутрь закристаллизовавшейся массы к моменту t, необходимо и достаточно, чтобы в какой-то момент $t' < t$, в какой-то точке P', лежащей от P на расстоянии меньшем

$$c(\bar{n}) \int_{t'}^{t} k(\tau)\, d\tau,$$

где $\bar{n}$ обозначает направление $\overline{P'P}$, образовался центр кристаллизации. При фиксированном t' объем $V'(t')$, занятый точками P', которые удовлетворяют выдвинутым условиям, равен

$$V'(t') = \frac{4\pi}{3} c^3 \left(\int_{t'}^{t} k(\tau)\, d\tau \right)^3.$$

Вероятность того, что за промежуток времени $\Delta t'$ в объеме $V'(t')$ образуется центр кристаллизации, равна

$$\alpha(t') V'(t') \Delta t' + o(\Delta t'),$$

а вероятность того, что это *не* произойдет, равна

$$1 - \alpha(t') V'(t') \Delta t' + o(\Delta t').$$

Поэтому вероятность того, что точка P к моменту t *не* будет включена в закристаллизовавшуюся массу, равна

$$q(t) = \prod_{i=1}^{s} \left\{ 1 - \alpha(t_i) V'(t_i) \Delta t' \right\} + o(1), \tag{1}$$

где $t = s\Delta t'$, $t_i = i\Delta t'$, а $o(1)$ бесконечно мало при бесконечно малом $\Delta t'$.

Логарифмируя (1), получим:

$$\log q(t) = \sum_{i=1}^{s} \alpha(t_i) V'(t_i) \Delta t' + o(1) = -\int_{0}^{t} \alpha(t') V'(t')\, dt' =$$

$$= -\frac{4\pi}{3} c^3 \int_{0}^{t} \alpha(t') \left(\int_{t'}^{t} k(\tau)\, d\tau \right)^3 dt'. \tag{2}$$

Для искомой вероятности

$$p(t) = 1 - q(t)$$

включения точки P в закристаллизовавшуюся массу получим, наконец,

$$p(t) = 1 - e^{-\frac{4\pi}{3} c^3 \Omega}, \tag{3}$$

где

$$\Omega = \int_{0}^{t} \alpha(t') \left(\int_{t'}^{t} k(\tau)\, d\tau \right)^3 dt'. \tag{4}$$

§ 3. Выводы

При достаточно большом по сравнению с размерами отдельных зерен объеме V можно положить $V_1(t) = Vp(t)$, или в силу (3)

$$V_1(t) = V\left(1 - e^{-\frac{4\pi}{3}c^3\Omega}\right), \tag{5}$$

где Ω определяется формулой (4). Формула (5) для объема $V_1(t)$ закристаллизовавшейся за время t массы решает первую из поставленных во введении задач. Если $\alpha(t)$ и $c(t, n)$ не зависят от времени, можем положить

$$\alpha(t) = \alpha, \quad k(t) = 1.$$

В этом случае

$$\Omega = \frac{\alpha t^4}{4} \tag{4a}$$

и формула (5) дает

$$V_1(t) = V\left(1 - e^{-\frac{\pi}{3}c^3\alpha t^4}\right). \tag{5a}$$

Для числа $N(t)$ центров кристаллизации, образовавшихся за время t, справедлива, при достаточно большом объеме V, формула

$$N(t) = V\int_0^t \alpha(\tau)\, q(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

При постоянном $\alpha(t) = \alpha$ и $k = 1$ получаем из (6)

$$N(t) = V\alpha \int_0^t e^{-\frac{\pi}{3}c^3\alpha\tau^4}\, d\tau,$$

или

$$N(t) = V\sqrt[4]{\frac{3\alpha^3}{\pi c^3}} \int_0^x e^{-\xi^4}\, d\xi, \tag{6a}$$

где

$$x = \sqrt[4]{\frac{\pi c^3\alpha}{3}}\, t.$$

При $t = +\infty$ формулы (6) и (6а) дают полное число центров кристаллизации, возникающих в течение всего процесса. В частности, при постоянных $\alpha(t) = \alpha$ и $k = 1$ получим:

$$N(+\infty) = V\sqrt[4]{\frac{3\alpha^3}{\pi c^3}} \int_0^\infty e^{-\xi^4}\, d\xi \sim 0.9\, V\left(\frac{\alpha}{c}\right)^{\frac{3}{4}}. \tag{7a}$$

Отметим еще особый случай, в котором все центры кристаллизации образуются в самом начале, в среднем по β на единицу объема. Соответствующие формулы получаются из общих предельным переходом. Вместо (4) получаем

$$\Omega = \beta\left(\int_0^t k(\tau)\, d\tau\right)^3, \tag{4b}$$

формула (5) сохраняется, а формула (6) заменяется при любом $t > 0$ тривиальным равенством $N = V\beta$. Если, кроме того, допустить, что $k = 1$ (т. е. $c(t, n)$ независимо от t), то получаем

$$\Omega = \beta t^3, \tag{4c}$$

$$V_1(t) = V\left(1 - e^{-\frac{4\pi}{3}c^3\beta t^3}\right). \tag{5c}$$

Математический институт
Московского гос. университета.

Поступило
20. IV. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Göler F. und Sachs G., Zeitschr. f. Physik, **77**, 281, 1932.
[2] Tamman G., Zeitschr. anorg. Chemie, **214**, 407, 1933.
[3] Старк Б. В., Миркин И. Л., Романовский А. Н., Металловедение и термическая обработка, «Труды Моск. института стали», **7**, 5—38, 1935.

A. KOLMOGOROFF. ZUR STATISTIK DER KRISTALLISATIONSVORGÄNGE IN METALLEN

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser gibt eine strenge Lösung der folgenden schematisierten Aufgabe: In dem unbegrenzten Raum entstehen zufällig Kristallisationszentren und zwar so, dass in jedem Volumen V, welches zur Zeit t von der kristallisierten Masse frei bleibt, im Laufe des Zeitintervalls $(t, t + dt)$ mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha V dt$ ein neues Zentrum entsteht. Die kristallisierte Masse wächst stetig in allen Richtungen mit der Geschwindigkeit c. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig gewählter Punkt P des Raumes zur Zeit t (der Prozess beginnt mit $t = 0$) in die kristallisierte Masse einbegriffen wird. Die Lösung ist durch die Formel

$$p(t) = 1 - e^{-\frac{\pi}{3}c^3\alpha t^4}$$

gegeben. Die Aufgabe lässt sich auch bei veränderlichen α und c lösen.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Н. В. СМИРНОВ

О ЧИСЛЕ ПЕРЕМЕН ЗНАКА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ УКЛОНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В настоящей работе исследуется закон распределения числа перемен знаков в последовательности

$$m_k - kp \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где m_k есть число появлений случайного события A в серии k независимых опытов (схема Бернулли), $p = P(A)$.

Полученный результат обобщается на последовательность $m_k - kp - \lambda\sqrt{npq}$.

1. Пусть p есть вероятность события A. Обозначим через m_n частоту появления A в серии n последовательных независимых испытаний. Если n неограниченно возрастает, то, как известно, с вероятностью, равной единице, мы можем утверждать справедливость предельного соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n}{n} = p$; более того, известно, что одностороннее приближение к пределу имеет вероятность нуль ([1]) и, следовательно, случайная величина $\frac{m_n}{n}$ неограниченно большое число раз осцилирует около своего стохастического предела p.

В настоящей работе исследуется закон распределения числа перемен знака в последовательности $m_k - kp$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, предполагая $n \to \infty$. Естественно различать два типа перемен знака— переходы от положительных значений к отрицательным, и обратно. Если перемена знака первого типа происходит при переходе от n-го к $n+1$-ому испытанию, то имеют место следующие неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &m_n - np \geqslant 0, \\ &m_{n+1} - (n+1)\,p < 0; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

отсюда

$$m_n = m_{n+1}, \quad n \leqslant \frac{m_n}{p} < n + 1. \tag{1'}$$

Перемены знака первого типа возможны таким образом при зна-

чениях n вида $n_k = \left[\frac{k}{p}\right]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и происходят каждый раз, когда для $n = n_k$ имеем $m_{n_k} = m_{n_{k+1}} = k$.

Аналогично можно показать, что перемены знака второго типа (характеризующиеся неравенствами $m_n - np \leqslant 0, m_{n+1} - (n+1)p > 0$) могут возникать лишь при $n = n_{k'} = \left[\frac{k'}{q}\right]$ $(k' = 1, 2, \ldots; q = 1 - p)$ и действительно происходят, если

$$m_{n_{k'+1}} - 1 = m_{n_{k'}} = n_{k'} - k'.$$

Обозначим через h_n число перемен знака первого типа в последовательности уклонений $m_1 - p$, $m_2 - 2p, \ldots, m_n - np$, через v_n — число перемен знака второго типа и положим $z_n = h_n + v_n$. Нетрудно видеть, что $v_n = h_n + \theta_n$, где θ_n может принимать одно из трех значений -1, 0, $+1$ и потому z_n отличается от $2h_n$ не более чем на единицу. Мы можем ограничиться исследованием распределения h_n: распределение v_n при большом n незначительно отличается от распределения h_n; при том же предположении распределение z_n почти идентично с распределением $2h_n$. Пусть для $t > 0$

$$\Phi_n(t) = P\left\{h_n \leqslant t\sqrt{npq}\right\}. \tag{2}$$

Теорема, которая будет доказана, заключается в следующем: *при $n \to \infty$ последовательность функций $\Phi_n(t)$ стремится к предельному закону распределения*:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \quad (t > 0) \\ &(\Phi(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant 0). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Эта теорема, как далее показывается, допускает известные обобщения.

2. Применяемый нами метод доказательства основывается на одной лемме, для формулировки которой введем следующие определения и обозначения.

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ последовательность случайных событий. Обозначим через $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}$ $(1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s \leqslant n)$ вероятность положительных исходов в испытаниях с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ и положим

$$\nu_s(n) = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s \leqslant n} p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}. \tag{4}$$

Пусть, далее, m_n число положительных исходов в n испытаниях; $\mu(n)$ некоторая положительная неограниченно возрастающая вместе с n функция от n и

$$F_n(t) = P\left\{m_n \leqslant t\mu(n)\right\}. \tag{5}$$

Тогда имеет место следующее предложение:

ЛЕММА 1. *Пусть для всякого фиксированного s и $n \to \infty$ выполняется условие*

$$\frac{\nu_s(n)}{[\mu(n)]^s} \to \nu_s. \tag{6}$$

Если, кроме того,

$$\overline{\lim} \sqrt[s]{v_s} < A, \tag{7}$$

где A некоторая положительная константа, то последовательность функций $F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)$ при $n \to \infty$ сходится к некоторому закону распределения $F(t)$ (в каждой точке непрерывности $F(t)$), причем имеет место следующее равенство:

$$\nu_s s\,! = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s\, dF(x). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть P_{nm} вероятность равенства $m_n = m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Полагая

$$\psi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} P_{nm} x^m \tag{9}$$

и разлагая многочлен $\psi_n(x)$ по степеням $x - 1$, будем иметь

$$\psi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \nu_m(n)(x-1)^m \qquad (\nu_0 = 1). \tag{10}$$

В самом деле, введем случайные величины z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получающие значения 1 или 0, смотря по тому, произошло или нет в k-ом испытании событие E_k. Тогда имеем:

$$P_{nm} = E\left\{ \sum_{i<i_2<\ldots<i_m} \prod_{k=1}^{k=m} z_{i_k} \prod_{l=1}^{l=n-m} (1 - z_{j_l}) \right\}, \tag{11}$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ образуют группу из m чисел, взятых из после, довательности $1, 2, \ldots, n$, а j_l $(l = 1, 2, \ldots, n - m)$ дополнительную группу. Кроме того, очевидно,

$$\nu_s(n) = E\left\{ \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s \leqslant n} z_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s} \right\}. \tag{11'}$$

На основании (11) получим

$$\psi_n(x) = E\left\{ \prod_{i=1}^{i=n} [z_i x + (1 - z_i)] \right\} = E\left\{ \prod_{i=1}^{i=n} [z_i(x-1) + 1] \right\};$$

отсюда в силу (11′) следует равенство (10).

Из (10) и (9) получим следующее соотношение:

$$\left.\frac{d^s \psi_n(x)}{dx^s}\right|_{x=1} = \nu_s(n)\, s\,! = \sum_{m=s}^{n} P_{nm}\, m(m-1)\ldots(m-s+1). \tag{12}$$

С другой стороны, для $s \geqslant 1$

$$E(m_n^s) = \sum_{m=1}^{n} P_{nm} m^s = \sum_{m=1}^{n} P_{nm} \sum_{r=1}^{r=s} \frac{\Delta^r 0^s}{r!} m^{(r)}, \tag{13}$$

где $m^{(r)} = m(m-1)\dots(m-r+1)$.

Из (13), на основании (12), имеем далее

$$E(m_n^s) = \sum_{r=1}^{r=s} \Delta^r 0^s \nu_r(n). \tag{14}$$

Полагая

$$M_s(n) = E\left\{\frac{m_n^s}{\mu_{(n)}^s}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \, dF_n(x),$$

в силу условия (6) и равенства (14) получим для каждого s

$$M_s(n) \to \Delta^s 0^s \nu_s = s!\, \nu_s = M_s; \tag{15}$$

при этом в силу условия (6) $\overline{\lim} \frac{\sqrt[s]{M_s}}{s}$ не превосходит некоторой положительной константы. Отсюда, на основании известной теоремы Pólya (²) в теории проблемы моментов, мы можем утверждать, что существует однозначно определенный бесконечной последовательностью моментов M_s закон распределения $F(t)$, к которому сходятся законы $F_n(t)$ при $n \to \infty$.

Перейдем теперь к доказательству нашей теоремы. Пусть событие E_k состоит в возникновении перемены знака первого типа при переходе от k-го к $k+1$-ому испытанию. Мы видели, что $P(E_n) = 0$, если $n \neq n_\beta = \left[\frac{\beta}{p}\right]$. Положим теперь для всякой системы индексов $1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s \leqslant c_n$, где c_n наибольшее из целых чисел a, удовлетворяющих неравенству $\left[\frac{a}{p}\right] \leqslant n$

$$P_{n_{\beta_1} n_{\beta_2} \dots n_{\beta_s}} = \pi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}. \tag{16}$$

По определению имеем:

$$\pi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s} = P\begin{pmatrix} m_{n_{\beta_1}} = \beta_1; \dots; m_{n_{\beta_s}} = \beta_s \\ m_{n_{\beta_1}+1} = \beta_1; \dots; m_{n_{\beta_s}+1} = \beta_s \end{pmatrix} \tag{17}$$

и потому

$$\pi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s} = P(m_{n_{\beta_1}} = \beta_1) \cdot q \cdot P(m_{n_{\beta_2} - n_{\beta_1} - 1} = \\ = \beta_2 - \beta_1) \cdot q \dots P(m_{n_{\beta_s} - n_{\beta_s} - 1} = \beta_s - \beta_{s-1}) \cdot q; \tag{18}$$

при этом $P(m_r = b)$ определяется известной формулой:

$$P(m_r = b) = C_r^b p^b q^{r-b}. \tag{19}$$

В нашем случае имеем далее

$$\nu_s(n) = \sum_{1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 \dots < \beta_s \leqslant c_n} \pi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}, \tag{20}$$

$$\mu(n) = \sqrt{npq}. \tag{20'}$$

Докажем теперь следующую лемму:

ЛЕММА 2. *При $n \to \infty$ и постоянном s имеем:*

$$\frac{\nu_s(n)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} \to \nu_s = \frac{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+1)}. \tag{21}$$

Доказательство. На основании (20) и (20′) имеем:

$$\frac{\nu_s(n)}{[\mu(n)]^s} = \frac{1}{(npq)^{\frac{s}{2}}} \sum_{1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_s \leqslant c_n} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}. \tag{22}$$

Разобьем сумму в правой части (22) на две части, полагая

$$\sum \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} = \sum\nolimits^{\mathrm{I}} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} + \sum\nolimits^{\mathrm{II}} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}, \tag{23}$$

причем в сумме $\sum^{\mathrm{II}}$ индексы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ удовлетворяют условию

$$\beta_1 \geqslant n^{\frac{1}{4}}; \quad \beta_j - \beta_{j-1} \geqslant n^{\frac{1}{4}} \quad (j = 2, 3, \ldots, s); \tag{24}$$

в сумме же $\sum^{\mathrm{I}}$ условие (24) для индексов $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$ нарушается хотя бы при одном j. Оценим сумму $\sum^{\mathrm{I}}$. Очевидно

$$\sum\nolimits^{\mathrm{I}} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} \leqslant \sum\nolimits^{(1)} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} + \sum\nolimits^{(2)} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} + \ldots + \sum\nolimits^{(s)} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}, \tag{25}$$

где $\sum^{(1)}$ содержит те слагаемые $\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}$, в которых первый индекс β_1 удовлетворяет условию $\beta_1 < n^{\frac{1}{4}}$ (и, кроме того, конечно, $1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_s \leqslant c_n$), а $\sum^{(k)}$ $(k = 2, 3, \ldots, s)$ распространяется на те слагаемые $\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}$, в которых индексы β_k и β_{k-1} удовлетворяют неравенству $\beta_k - \beta_{k-1} < n^{\frac{1}{4}}$. Так как

$$\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} \leqslant \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{j-1}\beta_{j+1}\ldots\beta_s},$$

то

$$\sum\nolimits^{(j)} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} \leqslant n^{\frac{1}{4}} \sum_{\beta_1 < \beta_2 \ldots < \beta_{j-1} < \beta_{j+1} < \ldots < \beta_s \leqslant c_n} \pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{j-1}\beta_{j+1}\beta_s} \leqslant n^{\frac{1}{4}} \nu_{s-1}(n)$$

и потому из (25) следует

$$\sum\nolimits^{\mathrm{I}} \frac{\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}}{(npq)^{\frac{s}{2}}} < \frac{sn^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{npq}} \frac{\nu_{s-1}(n)}{(npq)^{\frac{s-1}{2}}}. \tag{26}$$

С другой стороны, в случае биномиального распределения максимальная вероятность P_{mn} может быть представлена, как известно, в виде $\frac{1+\varepsilon_n}{\sqrt{2\pi npq}}$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда при любом m и n имеем:

$$P_{mn} < \frac{C}{\sqrt{n}}, \tag{27}$$

где C—некоторая положительная константа.

Принимая во внимание (18), (19), (20) и (26), найдем:

$$\frac{\nu_m(n)}{(npq)^{\frac{m}{2}}} < C^m\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{1\leqslant\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_s\leqslant c_n} \frac{1}{\sqrt{n_{\beta_1}(n_{\beta_2}-n_{\beta_1}-1)\ldots(n_{\beta_m}-n_{\beta_{m-1}}-1)}}\,\frac{1}{n^{\frac{m}{2}}} <$$

$$< \left\{C\sqrt{\frac{q}{p}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}}}\frac{1}{n}\right\}^m < \left(2C\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^m. \qquad (27')$$

На основании (27′) из (26) получаем

$$\frac{\sum^{\mathrm{I}}\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}}{(npq)^{\frac{s}{2}}} < \frac{s}{n^{\frac{1}{4}}}\,\frac{\left(2C\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{s-1}}{\sqrt{pq}}$$

и потому при фиксированном s имеем:

$$\frac{\sum^{\mathrm{I}}\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}}{(npq)^{\frac{s}{2}}} = O(n^{-\frac{1}{4}}). \qquad (28)$$

С другой стороны, для вероятности $P(m_{n_{\beta_k}-n_{\beta_{k-1}}-1} = \beta_k - \beta_{k-1})$ при $\beta_k - \beta_{k-1} > n^{\frac{1}{4}}$, пользуясь (19), легко установить следующее асимптотическое выражение:

$$P(m_{n_{\beta_k}-n_{\beta_{k-1}}-1} = \beta_k - \beta_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\beta_k-\beta_{k-1})}}\left(1+O(n^{-\frac{1}{4}})\right). \qquad (29)$$

Принимая во внимание (18), (19) и (29), для вероятностей $\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}$, входящих в состав суммы $\sum^{\mathrm{II}}$, найдем

$$\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} = \frac{q^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\,\frac{\left(1+O(n^{-\frac{1}{4}})\right)}{\sqrt{\beta_1(\beta_2-\beta_1)\ldots(\beta_s-\beta_{s-1})}}$$

и потому

$$\frac{\sum^{\mathrm{II}}\pi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}}{(npq)^{\frac{s}{2}}} = \left(\frac{c_n}{2\pi np}\right)^{\frac{s}{2}} \sum^{\mathrm{II}} \frac{\left(1+O(n^{-\frac{1}{4}})\right)}{\sqrt{\frac{\beta_1}{c_n}\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{c_n}\right)\ldots\left(\frac{\beta_s-\beta_{s-1}}{c_n}\right)}}\,\frac{1}{c_n^{s}}, \qquad (30)$$

причем суммирование в правой части (30) распространяется на значения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, удовлетворяющие условиям (24).

Но из определения c_n вытекает

$$\frac{c_n}{np} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

а сумма в правой части (30) при любом конечном s при возра-

стании n приближается к пределу, выражающемуся интегралом

$$I_s = \int\int \ldots \int_{0<x_1<x_2<\ldots<x_s<1} \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_s}{\sqrt{x_1(x_2-x_1)\ldots(x_s-x_{s-1})}} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}. \quad (31)$$

Из (22), (23), (28), (30) и (31) следует

$$\frac{\nu_s(n)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + o(1) = \frac{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+1)} + o(1), \quad (32)$$

что и доказывает справедливость (21).

С другой стороны,

$$s!\,\nu_s = \frac{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} t^s\,dt \quad (33)$$

и нетрудно проверить, что условия леммы 1 в нашем случае выполнены.

На основании лемм 1 и 2 мы можем утверждать, что $\Phi_n(t) = P(h_n \leqslant t\sqrt{npq})$ стремится с возрастанием n к закону распределения

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \quad (t > 0).$$

Отметим следующие асимптотические выражения для математического ожидания и дисперсии величины z_n:

$$E(z_n) = 2\nu_1(n) \approx 2\sqrt{\frac{2npq}{\pi}}, \quad (34)$$

$$D(z_n) \approx 4\left(1-\frac{2}{\pi}\right)npq. \quad (34')$$

3. Рассмотренный нами вопрос о числе перемен знака в последовательности уклонений допускает простую геометрическую интерпретацию. Соединяя последовательно точки с координатами (k, m_k) отрезками прямых, параллельных осям координат, мы получим ломаную T_n, изображающую течение случайной величины m_k на отрезке $(0n)$. Проведя прямую $y = kp$, мы без труда убеждаемся в том, что число перемен знака первого типа в последовательности уклонений $m_k - kp$ равно числу пересечений прямой с вертикальными звеньями ломаной T_n.

Рассмотрим теперь вопрос об оценке числа пересечений ломаной T_n с прямой $y = kp + \lambda\sqrt{npq}$ (параллельной прямой $y = kp$ в том же отрезке $0 \leqslant k \leqslant n$; $\lambda > 0$ не зависит от n и k. Эта

задача приводится к рассмотрению числа перемен знака в последовательности $m_k - kp - \lambda\sqrt{npq}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Не суживая задачи, мы можем ограничиться переменами знака первого типа, т. е. переходами от положительных к отрицательным значениям. Рассуждая, как и прежде, мы найдем, что пересечения этого типа возможны только в точках с абсциссами $n_k(\lambda)$ вида

$$n_k(\lambda) = \left[\frac{k - \lambda\sqrt{npq}}{p}\right], \tag{35}$$

где целое число k удовлетворяет неравенству

$$k \geqslant k_0 = [\lambda\sqrt{npq}] + 1, \tag{35'}$$

и действительно будут наблюдаться, если

$$m_{n_k(\lambda)} = k = m_{n_k(\lambda)+1}. \tag{36}$$

Пусть $\bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}(\lambda)$ вероятность имеет перемены знака 1-го типа в точках $n_{\beta_r}(\lambda)$ $(r = 1, 2, \ldots, s)$, причем $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ целые числа, связанные условиями

$$\beta_1 > k_0, \quad \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_s \leqslant c_n(\lambda),$$

где $c_n(\lambda)$ наибольшее из целых чисел $a(\lambda)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left[\frac{a(\lambda) - \lambda\sqrt{npq}}{p}\right] \leqslant n. \tag{37}$$

Нетрудно получить следующее выражение для вероятности $\bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}(\lambda)$, вполне аналогичное (18):

$$\bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} = P(m_{n_{\beta_1}} = \beta_1)\cdot q\cdot P(m_{n_{\beta_2}-n_{\beta_1}-1} = \beta_2 - \beta_1)\cdot q \ldots \\ \ldots P(m_{n_{\beta_s}-n_{\beta_{s-1}}-1} = \beta_s - \beta_{s-1})\cdot q \tag{38}$$

(опуская здесь, как и в дальнейшем тексте, для удобства λ в обозначении индексов); при этом $P(m_r = b)$ определяется попрежнему (19).

В данном случае

$$\nu_s(n, \lambda) = \sum_{k_0 \leqslant \beta_1 < \ldots < \beta_s \leqslant c_n(\lambda)} \bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} \tag{39}$$

и

$$\mu(n) = \sqrt{npq}. \tag{40}$$

Разбивая сумму в правой части (39) на две, $\sum^{\mathrm{I}}$ и $\sum^{\mathrm{II}}$ аналогично (23), мы тем же путем получим

$$\frac{\nu_s(n, \lambda)}{[\mu(n)]^s} = \frac{\sum^{\mathrm{II}} \bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}(\lambda)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} + O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right), \tag{41}$$

причем в сумме $\sum^{II}$ индексы суммирования $\beta_1\beta_2\ldots\beta_s$ удовлетворяют условию:

$$\beta_1 > k_0 + n^{\frac{1}{4}}, \quad \beta_j - \beta_{j-1} > n^{\frac{1}{4}} \ (j = 2, 3, \ldots, s). \tag{42}$$

Разобьем $\sum^{II}$ в свою очередь на две суммы: $\sum_1^{II}$ и $\sum_2^{II}$, относя к первой из них те слагаемые $\sum^{II}$, в которых индекс $\beta_1 \leqslant n^{\frac{3}{4}}$, а во вторую—все остальные члены $\sum^{II}$. Тогда нетрудно установить (рассуждая так же, как при выводе (30)) следующее неравенство:

$$\sum\nolimits_1^{II} \frac{\bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}(\lambda)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} < \frac{A^{s-1}}{\sqrt{npq}} \sum_{\beta_1} P(m_{n_{\beta_1}} = \beta_1), \tag{43}$$

где $A = 2C\sqrt{\frac{q}{p}}$ и суммирование по β_1 распространяется на значения, содержащиеся в интервале $k_0 + n^{\frac{1}{4}} \leqslant \beta_1 \leqslant n^{\frac{3}{4}}$. Но применяя неравенство (27), для значений β_1 в этом интервале имеем:

$$\sum_{\beta_1} P(m_{n_{\beta_1}} = \beta_1) < C \sum_{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{n_{\beta_1}}} <$$
$$< C \sum_{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta_1 - \lambda\sqrt{npq}}{p} - 1}} < C_1 \cdot \sum_{1 < \beta_1 \leqslant n^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, \tag{44}$$

где C_1 некоторая положительная константа.

Из (43) и (44) имеем:

$$\sum\nolimits_1^{II} \frac{\bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}(\lambda)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} < \frac{C_2}{\sqrt{n}} \int_0^{n^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2Cn^{-\frac{1}{8}}, \tag{45}$$

причем $C_2 > 0$ новая константа.

Пользуясь выражением (19), для вероятности $P(m_{n_{\beta_j}} - n_{\beta_{j-1}-1} = \beta_j - \beta_{j-1})$ при условии (42), найдем:

$$P(m_{n_{\beta_j} - n_{\beta_j}-1} = \beta_j - \beta_{j-1}) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi(\beta_j - \beta_{j-1})q}} \quad (j = 2, 3, \ldots, s). \tag{46}$$

С другой стороны, при $\beta_1 \geqslant n^{\frac{3}{4}}$ имеем:

$$n_{\beta_1} = \frac{\beta_1}{p}\left[1 + O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right], \tag{47}$$

$$n_{\beta_1} - \beta_1 = \frac{\beta_1 q}{p}\left[1 + O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right] \tag{47'}$$

и

$$P(m_{n_{\beta_1}} = \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_1 q}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{np}{\beta_1}(1+\delta_n)}, \tag{47''}$$

где $\delta_n = O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$.

С помощью (38), (47) и (46) найдем:

$$\frac{\sum_2^{II} \bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}(\lambda)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} =$$

$$= \frac{[1+o(1)]}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \sum_{n^{\frac{s}{4}}<\beta_1<\ldots<\beta_s\leqslant c_n} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{c_n}{\beta_1}(1+\delta_n')}}{\sqrt{\frac{\beta_1}{c_n}\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{c_n}\right)\cdots\left(\frac{\beta_s-\beta_{s-1}}{c_n}\right)}} \frac{1}{c_n^s}, \quad (48)$$

где $\delta_n' = O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$.

На основании (48) без большого труда можно установить справедливость предельного соотношения ($n \to \infty$):

$$\frac{\sum_2^{II} \bar{\pi}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}(\lambda)'}{(npq)^{\frac{s}{2}}} \to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int\int\ldots\int_{0<x_1<x_2<\ldots<x_s<1} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2x_1}} dx_1 dx_2 \ldots dx_s}{\sqrt{x_1(x_2-x_1)\ldots(x_s-x_{s-1})}}. \quad (49)$$

Интеграл в правой части (49) заменой переменных $x_i = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ приводится к интегралу I_s следующего вида:

$$I_s = \pi^{-\frac{s}{2}} \int\int\ldots\int_{(0<t_i, \sum_1^s t_i^2<1)} e^{-\frac{\lambda^2}{2t_1^2}} dt_1 \ldots dt_s. \quad (50)$$

Интегрируя сначала по той части $(s-1)$-мерной сферы $\sum_{i=2}^{s} = 1 - t_1^2$, которая лежит в положительном угле координатных плоскостей, мы приведем этот интеграл к однократному:

$$I_s = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{\lambda^2}{2t_1^2}} (1-t_1^2)^{\frac{s-1}{2}} dt_1 =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{(1+u^2)}{u^2}} (1+u^2)^{-\frac{s+2}{2}} du \quad \left(t_1 = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right). \quad (51)$$

Пользуясь хорошо известным равенством

$$(1+u^2)^{-\frac{s}{2}-1} = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{y^2(1+u^2)}{2}} y^{s+1} dy,$$

мы можем далее представить I_s в силу (51) в виде двойного интеграла

$$I_s = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2(1+u^2)}{2u^2}-\frac{y^2(1+u^2)}{2}} y^{s+1} dy\, du,$$

который после интеграции по переменному u приводится к виду:

$$I_s = \frac{\sqrt{2}}{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{(\lambda+y)^2}{2}} y^s dy =$$

$$= \frac{1}{s!}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\lambda+y)^2}{2}} y^s dy. \qquad (52)$$

На основании (41), (45), (49), (52) и леммы 1 заключаем, что $\Phi_n(t, \lambda) = P(h_n(\lambda) \leqslant t\sqrt{npq})$ при возрастании n стремится к закону распределения $\Phi(t, \lambda)$, моменты которого $M_s(\lambda)$ выражаются в силу (15) следующими равенствами:

$$M_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\lambda+y)^2}{2}} y^s dy \quad (s \geqslant 1). \qquad (53)$$

Отсюда нетрудно усмотреть, что

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(t, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0, \\ &\Phi(0, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\lambda e^{-\frac{u^2}{2}} du, \\ &\Phi(t, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\lambda}^t e^{-\frac{(u+\lambda)^2}{2}} du \quad \text{при} \quad t > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Для вероятности отсутствия пересечений мы нашли предельное выражение $\Phi(0, \lambda)$, легко получаемое из классических результатов Лапласа (задача о разорении игрока).

Математический институт
Московск. гос. университета.

Поступило
26.V.1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mezzanotte A., Estensione di un teorema sulla oscillazione della frequenze, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, t. LII, VI 1928.

[2] Pólya G., Mathem. Zeitschr., 8, 171—181, 1920.

N. V. SMIRNOFF. SUR LE NOMBRE DE VARIATIONS DU SIGNE DANS LA SUITE DES ÉCARTS (POUR LE CAS BERNOULLIEN)

RÉSUMÉ

Nous étudions dans ce travail la loi de la probabilité du nombre de variations du signe dans la suite des écarts

$$m_k - kp \quad (k = 1, 2, \dots n) \qquad (1)$$

où m_k est le nombre d'aparition d'un événement A dans k épreuves indépendentes à probabilité constante $P(A) = p$. Soit h_n un nombre de cas où l'écart (1) change son signe en passant de + à —. Posons ensuite

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_n(t) = P(h_n \leqslant t\sqrt{npq}) \qquad (t > 0, \quad q = 1 - p) \\ &\Phi_n(t) = 0 \qquad (t < 0). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La première partie contient la démonstration de la proposition suivante:

THÉORÈME 1. *La suite des fonctions* $\Phi_n(t)$ *converge pour* $n \to \infty$ *vers la loi limite des probabilités*

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (t \geqslant 0), \\ \Phi(t) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (t \leqslant 0). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La deuxième partie contient une généralisation du théorème 1. Soit $h_n(\lambda)$ un nombre de cas où la variable

$$m_k - kp - \lambda\sqrt{npq} \qquad (k = 0, 1, \dots n) \tag{4}$$

change son signe en passant de $+$ à $-$. En posant alors

$$\Phi_n(t, \lambda) = P(h_n(\lambda) \leqslant t\sqrt{npq})$$

nous aurons

THÉORÈME 2. *La suite des fonctions* $\Phi_n(t, \lambda)$ *converge pour* $n \to \infty$ *vers la loi limite définie par les égalités*

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t, \lambda) &= 0 \qquad (t < 0), \\ \Phi(0, \lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda e^{-\frac{u^2}{2}} du, \\ \Phi(t, \lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\lambda}^t e^{-\frac{(u+\lambda)^2}{2}} du. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

La démonstration de ces théorèmes est basée sur la proposition auxiliaire suivante:

LEMME. *Soit* $E_1, E_2, \dots, E_n$ *la suite des événements aléatoirs et* m_n *le nombre des résultats positifs dans* n *épreuves. Soit* $F_n(t) = P(m_n \leqslant t\mu(n))$ *où* $\mu(n)$ *est une fonction croissante indéfiniment, toujours positive. Désignons par* $p_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_s}$ $(1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s \leqslant n)$ *la probabilité des résultats positifs dans les épreuves correspondentes* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ *et soit* $\nu_s(n) = \sum\limits_{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s \leqslant n} p_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_s}$.

Supposons encore que pour s *constant arbitraire on a*

$$\frac{\nu_s(n)}{[\mu(n)]^s} \to \nu_s \qquad (n \to \infty)$$

et que

$$\overline{\lim} \sqrt[s]{\nu_s} < \infty \qquad (s \to \infty).$$

Alors la suite des fonctions $F_n(t)$ *converge* $(n \to \infty)$ *vers une loi de distribution* $F(t)$, *les moments étant donnés par la formule*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^s dF(x) = \nu_s s! \qquad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

С. П. ФИНИКОВ

КОНГРУЭНЦИИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ В СОВМЕСТНОМ ИЗГИБАНИИ

(*Представлено академиком* **С. А. Чаплыгиным**)

В статье рассматривается совместное проективное изгибание двух конгруэнций. Две произвольно взятые конгруэнции неизгибаемы, но к любой конгруэнции можно присоединить вторую так, чтобы пара изгибалась.

Террачини в своей работе (1) вводит новое понятие изгибания, основанное на сохранении некоторого простейшего дифференциального инварианта, и применяет его к изгибанию сложного геометрического образа, состоящего из поверхности и конгруэнции, соответствующие элементы которых находятся в состоянии инцидентности.

Новая идея изгибания несомненно обогатила проективно-дифференциальную геометрию: она привела к расширению понятия изгибания конгруэнции и дала возможность построить ассоциированные с поверхностью конгруэнции. Н. И. Буторин, работая под моим руководством над дипломной работой, показал, что результаты, полученные в этой области Террачини, не могут быть достигнуты на основе определения изгибания, данного Фубини-Картаном.

Мне кажется, однако, что и это классическое понятие изгибания может дать новые интересные результаты, если его применить к изгибанию сложных геометрических образов.

В настоящей работе я рассматриваю совместное изгибание двух конгруэнций. Согласно определению Картана, два геометрических образа [M] и [M′] проективно наложимы порядка n, если между элементами их установлено взаимно-однозначное соответствие $\mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ и к каждой паре соответствующих элементов присоединено проективное преобразование П, переводящее [M′] в [N], так что соответствующие элементы M и N и их бесконечно близкие совпадают до бесконечно малых $(n+1)$-го порядка включительно.

В применении к паре конгруэнций уже изгибание 1-го порядка не является тривиальным: произвольная пара конгруэнций $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ неизгибаема, но ко всякой конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ можно присоединить вторую $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ так, что полученная пара допускает изгибание. Такую конгруэнцию мы будем называть ассоциированной в совместном изгибании.

Какова бы ни была конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, ассоциированная конгруэнция определяется с тремя произвольными функциями двух аргументов. В виду большого произвола в выборе ассоциированной конгруэнции можно наложить на нее дополнительное требование. Естественно искать ассоциированную конгруэнцию так, чтобы она одновременно являлась преобразованием T от первой. Две конгруэнции находятся в отношении преобразования T, если прямые, соединяющие одноименные фокусы двух соответствующих лучей, касаются в этих точках фокальных поверхностей.

Всякая пара конгруэнций, находящихся в отношении преобразования T, проективно наложима на пару конгруэнций, полученных из первоначальной пары конгруэнций коррелятивным преобразованием. Это не является характерной особенностью преобразования T: к любой данной конгруэнции можно подобрать вторую с тремя произвольными функциями двух аргументов так, чтобы полученная пара налагалась на взаимно-полярную. Если исключить наложение на пару, получаемую коррелятивным преобразованием, то не всякая конгруэнция обладает ассоциированной конгруэнцией, находящейся с ней в преобразовании T. Класс конфигураций T с ассоциированной парой противоположных конгруэнций зависит от одной произвольной функции двух аргументов. Наложимая пара принадлежит к тому же классу. Располагая этой произвольной функцией, можно найти с 16 произвольными функциями одного аргумента конфигурации Бианки (конфигурация четырех конгруэнций W в теореме переместительности асимптотических преобразований) с ассоциированной парой противоположных конгруэнций или расслояемые пары ассоциированных конгруэнций. Налагающаяся пара принадлежит к тому же классу

Можно отметить целый ряд особых случаев ассоциированной пары конгруэнций в преобразовании T. Пара конгруэнций, взаимных относительно нуль-системы линейного комплекса, изгибаема; налагающаяся пара (того же рода) зависит от одной произвольной функции двух аргументов. Пара конгруэнций W с общими линейчатыми фокальными полостями изгибаема; налагающаяся пара—того же рода и зависит от одной произвольной функции одного аргумента. Сопряженная расслояемая пара налагается на любую другую сопряженную пару или по крайней мере на пару, полученную из нее проективным изгибанием одной конгруэнции, когда лучи другой конгруэнции пары увлекаются, будучи неразрывно связаны с фокальными плоскостями сходственного луча. Пара противоположных конгруэнций периодической последовательности Лапласа с периодом 4 изгибаема; налагающаяся пара—того же рода (кроме пар, взаимных относительно линейного комплекса) и зависит по крайней мере от произвольного постоянного.

Если повысить требование к наложимости конгруэнций и искать изгибание 2-го порядка для первой конгруэнции и 1-го для второй, то придем к конгруэнциям W с линейчатыми фокальными полостями; луч второй конгруэнции пересекает ту же пару соответствующих образующих фокальных поверхностей. Если он касается фокальных полостей первой конгруэнции, то обе конгруэнции пары наложимы изгибанием 2-го порядка.

Попутно мы получаем проективное изгибание конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями. Оно представляет некоторую особенность: поверхности 2-го порядка, образованные лучами конгруэнции, пересекающими пару соответствующих прямолинейных образующих фокальных поверхностей, при изгибании конгруэнции остаются неизменными. Рассматриваемая конгруэнция—единственная, допускающая изгибание целыми линейчатыми поверхностями.

Предварительное сообщение было сделано в моей статье ([2]). Основы применяемого метода изложены в статьях ([3,4]). Впрочем, в § 1 я снова даю все необходимые сведения; содержание других параграфов приведено в аннотации.

§ 1. Нормальный тетраэдр

Пусть нам даны две конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ и $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$, из которых по крайней мере первая—не параболическая. Выберем точки $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ в фокусах луча $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ и примем за точки $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_4$ точки пересечения луча $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ с фокальными плоскостями первой конгруэнции.

Будем обозначать буквой $\mathbf{M}_i$ четыре однородных координаты точки $\mathbf{M}_i$. Производные $\mathbf{M}_{i_u}$, $\mathbf{M}_{i_v}$ определят две новые точки, ле-

жащие в касательной плоскости поверхности $(\mathbf{M}_i)$. Если обозначить через a_i^k, b_i^k координаты этих точек относительно тетраедра $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$, то получим основные уравнения:

$$\mathbf{M}_{i_u} = \sum a_i^k \mathbf{M}_k, \qquad \mathbf{M}_{i_v} = \sum b_i^k \mathbf{M}_k, \tag{1}$$

определяющие проективные перемещения тетраедра $[\mathbf{M}]$ при изменении параметров u или v.

Примем за координатные поверхности $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ развертывающиеся поверхности конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$. Если подходящим образом нормировать координаты $\mathbf{M}_i$, то компоненты проективных перемещений тетраедра a_i^k, b_i^k можно записать таблицей:

	$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	$\mathbf{M}_4$
$\mathbf{M}_{1_u}$	0	δ	0	0
$\mathbf{M}_{2_u}$	q_1	p_1	0	1
$\mathbf{M}_{3_u}$	m	n	0	$-q$
$\mathbf{M}_{4_u}$	N_1	R_1	$-\Delta_1$	$-P_1$

	$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	$\mathbf{M}_4$
$\mathbf{M}_{1_v}$	p	q	1	0
$\mathbf{M}_{2_v}$	δ_1	0	0	0
$\mathbf{M}_{3_v}$	R	N	$-P$	$-\Delta$
$\mathbf{M}_{4_v}$	n_1	m_1	$-q_1$	0

(2)

Условия совместности системы уравнений (1) принимают вид:

$$p_u = \delta\delta_1 - qq_1 - m, \qquad p_{1_v} = \delta\delta_1 - qq_1 - m_1, \tag{3a}$$
$$P_u = \Delta\Delta_1 - qq_1 - m, \qquad P_{1_v} = \Delta\Delta_1 - qq_1 - m_1, \tag{3b}$$
$$\delta_v - q_u = p\delta + p_1 q + n, \qquad \delta_{1_u} - q_{1_v} = p_1\delta_1 + pq_1 + n_1, \tag{3c}$$
$$\Delta_u - q_v = P_1\Delta + Pq + N, \qquad \Delta_{1_v} - q_{1_u} = P\Delta_1 + P_1 q_1 + N_1, \tag{3d}$$
$$\left.\begin{aligned} m_v - R_u &= -m(P+p) - \Delta N_1 - \delta_1 n + Nq_1 + n_1 q, \\ m_{1_u} - R_{1_v} &= -m_1(P_1+p_1) - \Delta_1 N - \delta n_1 + N_1 q + nq_1, \end{aligned}\right\} \tag{3e}$$
$$\left.\begin{aligned} n_v - N_u &= R\delta - R_1\Delta + Np_1 - Pn - q(m - m_1), \\ n_{1_u} - N_{1_v} &= R_1\delta_1 - R\Delta_1 + N_1 p - P_1 n_1 - q_1(m_1 - m). \end{aligned}\right\} \tag{3f}$$

Если функции $\Delta, \Delta_1, \delta, \delta_1, R, R_1, n, n_1, N, N_1, m, m_1, P, P_1, p, p_1, q, q_1$ удовлетворяют системе (3a—f), то система (1) вполне интегрируема и определяет $\mathbf{M}_i$ с четырьмя произвольными постоянными. Четыре линейно независимых решения можно принять за однородные координаты точек $\mathbf{M}_i$. При изменении параметров u, v тетраедр $[\mathbf{M}]$ опишет своими противоположными ребрами $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ две конгруэнции. Все другие решения системы (1) определяют конгруэнции, проективно эквивалентные двум первым.

Таким образом 18 функций Δ, Δ_1 и т. д. вполне определяют пару конгруэнций. Обратное положение не совсем верно. Таблица компонентов (2) допускает: 1) замену параметров u, v на новые параметры $u^* = \varphi(u)$, $v^* = \psi(v)$ и 2) умножение координат $\mathbf{M}_1$

и $\mathbf{M}_3$ на произвольную функцию V одного переменного v и координат $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_4$ на произвольную функцию U одного переменного u. Новые компоненты (обозначенные звездочкой) будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^* = \Delta \frac{V}{U}\left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2 \frac{du^*}{du}, \qquad \delta^* = \delta \frac{V}{U} \frac{du}{du^*},\\
&R^* = R\left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, \quad N^* = N\frac{V}{U}\left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, \quad m^* = m\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*},\\
&n^* = n\frac{V}{U}\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*},\\
&q^* = q\frac{V}{U}\frac{dv}{dv^*}, \quad p^* = p\frac{dv}{dv^*} + \frac{d\ln V}{dv^*},\\
&P^* = P\frac{dv}{dv^*} - \frac{d}{dv^*}\ln\left(V\frac{dv}{dv^*}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Нетрудно заметить, что величины p, q и p_1, q_1 определяют положение точек $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_4$ в фокальных плоскостях $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_{1_v})$ и $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_{2_u})$. Меняя эти величины, мы изменим вторую конгруэнцию $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$, оставляя неизменной первую $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$. При этом четыре компонента Δ, Δ_1, δ, δ_1 вообще не будут меняться; что касается остальных, то они изменятся. Если обозначить чертой наверху компоненты, соответствующие значениям p, q, p_1, q_1, равным нулю (которые мы будем называть компонентами Вильчинского), то будем иметь:

$$P = \overline{P} + p, \quad m = \overline{m} - p_u - qq_1, \quad n = \overline{n} - q_u - p_1 q - p\delta, \tag{5a}$$

$$R = \overline{R} - \overline{P}p - p^2 - q_1\Delta - p_v - q\delta_1, \tag{5b}$$

$$N = \overline{N} - \overline{P}q - pq - p_1\Delta - q_v. \tag{5c}$$

Внося $p = q = p_1 = q_1 = 0$ в уравнения (3a—f), получим для компонентов Вильчинского систему:

$$\overline{m} = \overline{m}_1 = \delta\delta_1, \quad \overline{n} = \delta_v, \quad \overline{n}_1 = \delta_{1_u}, \quad \overline{P}_u = \overline{P}_{1_v} = \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1, \tag{6a}$$

$$\overline{N} = \Delta_u - \overline{P}_1\Delta, \quad \overline{N}_1 = \Delta_{1_v} - \overline{P}\Delta_1, \tag{6b}$$

$$\overline{n}_v - \overline{N}_u + \overline{P}\delta_v = \overline{R}\delta - \overline{R}_1\Delta, \quad \overline{n}_{1_u} - \overline{N}_{1_v} + \overline{P}_1\delta_{1_u} = \overline{R}_1\delta_1 - \overline{R}\Delta, \tag{6c}$$

$$\overline{R}_u = \overline{N}_1\Delta + 2\delta_v\delta_1 + \delta\delta_{1_v} + \overline{P}\delta\delta_1, \quad \overline{R}_{1_v} = \overline{N}\Delta_1 + 2\delta_{1_u}\delta + \delta_1\delta_u + \overline{P}_1\delta\delta_1. \tag{6d}$$

§ 2. Изгибание 1-го порядка пары конгруэнций

Пусть нам дана пара конгруэнций $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$, определяемая таблицей компонентов (2), и вторая пара $(\mathbf{M}_1'\mathbf{M}_2')$, $(\mathbf{M}_3'\mathbf{M}_4')$, определяемая такой же таблицей, все компоненты которой отмечены штрихом наверху. Пара $[\mathbf{M}']$ наложима на пару $[\mathbf{M}]$ изгибанием 1-го порядка, если между элементами их установлено взаимно-однозначное соответствие и каждой паре соответствующих элементов $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{M}$ присоединено проективное преобразование Π, обладающее следующими свойствами: применяя преобразование Π к паре $[\mathbf{M}']$, мы ее преобразуем в пару $[\mathbf{N}]$ так, что рассматри-

ваемая пара соответствующих элементов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ совместится, а элементы бесконечно близкие будут совпадать до бесконечно малых 1-го порядка включительно.

Обозначая через $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$ Плюкеровы координаты прямой $\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k$, т. е. 6 миноров матрицы, составленной из координат точек $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{M}_k$, мы можем записать условие касания 1-го порядка $[\mathbf{N}]$ и $[\mathbf{M}]$ в виде равенств, справедливых до бесконечно малых du, dv первого порядка:

$$(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) + d(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) + \ldots = \\ = [(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + d(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + \ldots][\lambda + \lambda_1 du + \lambda_2 dv + \ldots], \tag{7a}$$

$$(\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4) + d(\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4) + \ldots = \\ = [(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + d(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + \ldots][\mu + \mu_1 du + \mu_2 dv + \ldots]. \tag{7b}$$

Здесь λ, λ_1, $\lambda_2, \ldots$, μ, μ_1, $\mu_2 \ldots$ суть множители пропорциональности. Сравнивая бесконечно малые 1-го порядка, получим

$$(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) = \lambda(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2), \quad (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4) = \mu(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4), \tag{8a}$$

$$d(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) = \lambda d(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + (\lambda_1 du + \lambda_2 dv)(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2), \tag{8b}$$

$$d(\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4) = \mu d(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + (\mu_1 du + \mu_2 dv)(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4). \tag{8c}$$

Исследование системы (8a—c) можно значительно упростить, если воспользоваться следующими соображениями.

Среди лучей, бесконечно близких любому заданному лучу $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, найдутся два луча (действительных или мнимых), которые с ним пересекаются (до бесконечно малых высшего порядка). Эти лучи пересекают $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ в фокусах $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ и определяют вместе с лучом $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ две фокальные плоскости. Такая же картина будет в бесконечно малой окрестности луча $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$. При этом после наложения конгруэнций пересекающиеся с $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ лучи из бесконечно малой окрестности его могут совпасть (до бесконечно малых 1-го порядка включительно) только с пересекающимися лучами из бесконечно малой окрестности $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$. Значит, и точки их пересечения, т. е. фокусы луча $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, совпадут с фокусами луча $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$ и плоскости их, т. е. фокальные плоскости луча $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, совпадут с фокальными плоскостями луча $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$. Наконец, огибающие фокальных плоскостей, т. е. развертывающиеся поверхности обеих конгруэнций, очевидно, тоже соответствуют друг другу.

Таким образом мы можем прежде всего принять, что параметры u, v и u', v' обеих пар $[\mathbf{M}]$ и $[\mathbf{M}']$ совпадают:

$$u' = u, \quad v' = v.$$

Затем точки $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$, как фокусы луча $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$, совпадают с точками $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$. Кроме того, так как луч $\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4$ совпадает с лучом $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ и фокальные плоскости $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ совпадают с плоскостями $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2\mathbf{N}_3$ и $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2\mathbf{N}_4$, то и точки $\mathbf{N}_3$, $\mathbf{N}_4$ совпадают с точками $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$.

Мы можем присоединить, следовательно, к условиям (8а—с) следующие:

$$\mathbf{N}_1 = \rho_1 \mathbf{M}_1, \quad \mathbf{N}_2 = \rho_2 \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{N}_3 = \rho_3 \mathbf{M}_3, \quad \mathbf{N}_4 = \rho_4 \mathbf{M}_4. \tag{9}$$

Уравнения (8а) дадут теперь

$$\lambda = \rho_1 \rho_2, \quad \mu = \rho_3 \rho_4. \tag{10}$$

Уравнения (8b) и (8с) можно разбить каждое на два, рассматривая отдельно производные по u и по v:

$$(\mathbf{N}_{1_u}\mathbf{N}_2) + (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_{2_u}) = \lambda(\mathbf{M}_{1_u}\mathbf{M}_2) + \lambda(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_{2_u}) + \lambda_1(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2), \tag{11a}$$

$$(\mathbf{N}_{1_v}\mathbf{N}_2) + \mathbf{N}_1\mathbf{N}_{2_v}) = \lambda(\mathbf{M}_{1_v}\mathbf{M}_2) + \lambda(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_{2_v}) + \lambda_2(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2), \tag{11b}$$

$$(\mathbf{N}_{3_u}\mathbf{N}_4) + (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_{4_u}) = \mu(\mathbf{M}_{3_u}\mathbf{M}_4) + \mu(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{4_u}) + \mu_1(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4), \tag{11c}$$

$$(\mathbf{N}_{3_v}\mathbf{N}_4) + (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_{4_v}) = \mu(\mathbf{M}_{3_v}\mathbf{M}_4) + \mu(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{4_v}) + \mu_2(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4). \tag{11d}$$

Здесь производные $\mathbf{M}_{i_u}$, $\mathbf{M}_{i_v}$ можно заменить с помощью таблицы (2). Производные $\mathbf{N}_{i_u}$, $\mathbf{N}_{i_v}$ могут быть получены помощью такой же таблицы для $[\mathbf{M}']$. Действительно, тетраедр $[\mathbf{N}]$ получен из тетраедра $[\mathbf{M}']$ проективным преобразованием, а такое преобразование не меняет компонентов проективных движений тетраедра.

После такой замены мы подставим вместо $\mathbf{N}_i$ их выражения по формулам (9) и сравним коэффициенты у отдельных членов $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$, между которыми не может быть линейной зависимости, ибо прямые $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$, т. е. ребра тетраедра, заведомо не лежат в одной плоскости.

Мы получаем таким образом систему уравнений:

$$\mu = \lambda = \rho_1\rho_4 = \rho_2\rho_3, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda} = p_1' - p_1, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda} = p' - p, \tag{12a}$$

$$m' = m, \quad m_1' = m_1, \quad R_1' = R_1, \quad R' = R, \tag{12b}$$

$$N_1'\rho_1 = N_1\rho_2, \quad N'\rho_2 = N\rho_1, \quad n'\rho_2 = n\rho_1, \quad n_1'\rho_1 = n_1\rho_2, \tag{12c}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu} = -P_1' + P_1, \quad \frac{\mu_2}{\mu} = -P' + P. \tag{12d}$$

Из (12а) и (10) следует $\rho_3 = \rho_1$, $\rho_4 = \rho_2$.

Если, кроме того, обозначим

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \vartheta, \tag{13}$$

то уравнения (12b, с) примут вид:

$$m' = m, \quad m_1' = m_1, \quad R' = R, \quad R_1' = R_1, \tag{14a}$$

$$n' = \vartheta n, \quad n_1' = \frac{1}{\vartheta} n_1, \quad N' = \vartheta N, \quad N_1' = \frac{1}{\vartheta} N_1. \tag{14b}$$

Остальные уравнения (12a,d) определяют коэффициенты пропорциональности λ_i, μ_i, которые нас сейчас не интересуют.

Уравнения (14a, b) определяют 8 компонентов перемещений тетраедра $[\mathbf{M}']$, если известно ϑ. Чтобы определить налагающуюся пару $[\mathbf{M}']$, надо найти остальные 10 компонентов Δ', Δ_1', δ', δ_1',

p', p_1', q', q_1', P', P_1', так, чтобы они и первые 8 компонентов (14a, b) удовлетворяли системе (3a—f).

Так как на 11 неизвестных функций (10 компонентов и вспомогательная функция ϑ) мы имеем 12 уравнений, то в общем случае существование налагающейся пары [$\mathbf{M}'$] не обеспечено.

§ 3. Конгруэнции, ассоциированные в совместном изгибании

Пусть нам дана какая-нибудь конгруэнция ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$); ту конгруэнцию ($\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$), которая вместе с данной образует пару [$\mathbf{M}$], допускающую проективное изгибание, мы будем называть ассоциированной в совместном изгибании. Поставим задачу: найти конгруэнции, ассоциированные с данной.

Мы можем задать первую конгруэнцию ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$) компонентами проективных движений какого-либо нормального тетраедра [$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\overline{\mathbf{M}}_3\overline{\mathbf{M}}_4$], связанного с конгруэнцией, например, тетраедра Вильчинского, со значениями компонентов

$$\left.\begin{array}{c} \overline{p}=0, \quad \overline{q}=0, \quad \overline{p}_1=0, \quad \overline{q}_1=0, \\ \Delta,\ \Delta_1,\ \delta,\ \delta_1,\ \overline{P},\ \overline{P}_1,\ \overline{m},\ \overline{m}_1,\ \overline{n},\ \overline{n}_1,\ \overline{N},\ \overline{N}_1,\ \overline{R},\ \overline{R}_1, \end{array}\right\} \tag{15}$$

удовлетворяющих системе уравнений (6a—d).

Пусть теперь с этой же конгруэнцией ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$) связан второй нормальный тетраедр [$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$] с компонентами проективных движений

$$p,\ q,\ p_1,\ q_1,\ \Delta,\ \Delta_1,\ \delta,\ \delta_1,\ P,\ P_1,\ m,\ m_1,\ n,\ n_1,\ N,\ N_1,\ R,\ R_1, \tag{16}$$

так что конгруэнции ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$), ($\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$) допускают проективное изгибание с налагаемой парой [$\mathbf{M}'$].

Компоненты (15) и (16) связаны соотношениями (5a—c). Компоненты (16) и компоненты налагаемой пары [$\mathbf{M}'$] удовлетворяют уравнениям (14a, b). Наконец, компоненты [$\mathbf{M}'$] со своей стороны должны удовлетворять основной системе уравнений (3a—f) с заменой величин (16) на величины, обозначаемые теми же буквами, но со штрихом наверху. Эти уравнения мы будем обозначать (3a'—f').

Если величины (15) даны, уравнения (5a—c) определяют компоненты (16) через четыре функции p, q, p_1, q_1. Внося эти значения в уравнения (14a, b), получим:

$$m' = \delta\delta_1 - qq_1 - p_u, \qquad m_1' = \delta\delta_1 - qq_1 - p_{1_v},$$

$$R' = \overline{R} - \overline{P}p - p^2 - q_1\Delta - q\delta_1 - p_v, \quad R_1' = \overline{R}_1 - \overline{P}_1p_1 - p_1^2 - q\Delta_1 - q_1\delta - p_{1_u},$$

$$n' = \vartheta(\delta_v - q_u - p_1q - p\delta), \qquad n_1' = \frac{1}{\vartheta}(\delta_{1_u} - q_{1_v} - pq_1 - p_1\delta_1),$$

$$N' = \vartheta(\Delta_u - \overline{P}_1\Delta - \overline{P}q - pq - p_1\Delta - q_v), N_1' = \frac{1}{\vartheta}(\Delta_{1_v} - \overline{P}\Delta - \overline{P}_1q_1 - p_1q_1 - p\Delta_1 - q_{1_u}).$$

Эти уравнения надо присоединить к системе (3a′—f′). Все эти уравнения можно написать в виде системы:

$$p_u = \delta\delta_1 - qq_1 - m', \qquad p_v = \bar{R} - \bar{P}p - p^2 - q_1\Delta - q\delta_1 - R', \quad (17a)$$

$$q_u = \bar{n} - p_1 q - p\delta - \frac{n'}{\vartheta}, \qquad q_v = \bar{N} - \bar{P}q - pq - p_1\Delta - \frac{N'}{\vartheta} \quad (17b)$$

$$p'_u = \delta'\delta'_1 - q'q'_1 - m', \quad (17c)$$

$$P'_u = \Delta'\Delta'_1 - q'q'_1 - m', \quad (17d)$$

$$\delta'_v - q'_u = p'\delta' + p'_1 q' + n', \quad (17e)$$

$$\Delta'_u - q'_v = P'_1\Delta' + P'q' + N', \quad (17f)$$

$$m'_v - R'_u = -m'(P' + p') - \Delta' N'_1 - \delta'_1 n' + N' q'_1 + n'_1 q', \quad (17g)$$

$$n'_v - N'_u = R'\delta' - R'_1\Delta' + N'p'_1 - P'n' - q'(m' - m'_1), \quad (17h)$$

к которой надо добавить уравнения, получаемые заменой u на v. Система (17a—h) не полна. Уравнения (17a, b) определяют производные от p, q, p_1, q_1 по u и по v. Дифференцируя левый столбец по v, правый по u и исключая производные с помощью других уравнений системы, получим:

$$m'(P' + p' - \bar{P} - 2p) - N'\left(q'_1 - \frac{q_1}{\vartheta}\right) +$$
$$+ N'_1(\Delta' - \Delta\vartheta) = -n'\left(\delta'_1 - \frac{\delta_1}{\vartheta}\right) + n'_1(q' - q\vartheta), \quad (18a)$$

$$m'_1(P'_1 + p'_1 - \bar{P}_1 - 2p_1) - N'_1(q' - q\vartheta) +$$
$$+ N'\left(\Delta'_1 - \frac{\Delta_1}{\vartheta}\right) = -n'_1(\delta' - \delta\vartheta) + n'\left(q'_1 - \frac{q_1}{\vartheta}\right), \quad (18b)$$

$$(m' - m'_1)(q' - q) + N'\left(p'_1 + \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \ln\vartheta}{\partial u} - \frac{p_1}{\vartheta}\right) =$$
$$= R'_1(\Delta' - \Delta) - R'(\delta' - \delta) - n'\left(P' - \frac{\bar{P} + p}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \ln\vartheta}{\partial v}\right), \quad (18c)$$

$$(m'_1 - m')(q'_1 - q_1) + N'_1\left(p' - \vartheta\frac{\partial \ln\vartheta}{\partial v} - p\vartheta\right) = R'(\Delta'_1 - \Delta_1) -$$
$$- R'_1(\delta'_1 - \delta_1) - n'_1\left[P'_1 - (\bar{P}_1 + p_1)\vartheta - \vartheta\frac{\partial \ln\vartheta}{\partial u}\right]. \quad (18d)$$

Вводя новые независимые переменные

$$\alpha = \alpha(u, v), \quad \beta = \beta(u, v),$$

мы сумеем разрешить уравнения (17c—h) относительно производных от p', P', δ', Δ', m', n', p'_1, P'_1, δ'_1, Δ'_1, m'_1, n'_1 по α. Внося эти значения в уравнения, полученные дифференцированием по α уравнений (18a—d), мы получим 4 уравнения для производных от q', q'_1, R', R'_1, N', N'_1. Если матрица, составленная из коэффициентов при этих производных, ранга 4, то мы можем разрешить эту систему относительно четырех из этих производных. Так как определители этой матрицы содержат существенным образом неизвестные функции, то, давая им подходящие начальные значения, мы можем всегда получить определитель отличный от нуля.

Таким образом мы можем задать три неизвестные функции, например, q', q'_1 и ϑ—как произвольные функции двух аргумен-

тов. Если, кроме того, дать начальные значения p', p_1', P', P_1', δ', δ_1', Δ', Δ_1', R', R_1', n', n_1' как произвольные функции от β при $\alpha = \alpha_0$ и начальные значения p, q, p_1, q_1 как произвольные постоянные для $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, то система (17a—h), (18) определит единственную ассоциированную конгруэнцию $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ и налагающуюся пару $[\mathbf{M}']$. Так как ϑ задается произвольно и всегда может быть выбрано отличным от единицы, то налагаемая пара $[\mathbf{M}']$ не тождественна первоначальной $[\mathbf{M}]$ (не может быть получена из нее проективным преобразованием).

Ассоциированная конгруэнция зависит, следовательно, от трех произвольных функций двух аргументов. Так как положение луча $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ зависит от четырех координат p, q, p_1, q_1, то снова приходим к заключению, что не всякая пара конгруэнций изгибаема.

§ 4. Общие свойства изгибаемых пар

Мы видели, что при проективном наложении 1-го порядка двух конгруэнций фокусы переходят в фокусы, фокальные плоскости в фокальные плоскости и развертывающиеся поверхности соответствуют развертывающимся поверхностям. Отсюда следует, что развертывающиеся поверхности, фокусы и фокальные плоскости второй конгруэнции обеих пар тоже совпадают при наложении. Это сейчас же следует из уравнений (14a, b).

Фокальная плоскость есть касательная плоскость к развертывающейся поверхности конгруэнции. Если она пересекает луч $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ в точке $\mathbf{M}_1 + \nu\mathbf{M}_2$ и буквой $\mathbf{P}$ обозначить текущие координаты, то уравнение такой плоскости можно написать в виде:

$$(\mathbf{M}_1 + \nu\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{P}) = 0, \tag{19}$$

где из четырех строк определителя написана только одна. Так как характеристика семейства плоскостей (19) совпадает с лучом $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$, то уравнение, получаемое дифференцированием (19) вдоль развертывающейся поверхности, должно удовлетворяться и точкой $\mathbf{P} = \mathbf{M}_3$ и точкой $\mathbf{P} = \mathbf{M}_4$. Внося в уравнение

$$\begin{aligned}[d(\mathbf{M}_1 + \nu\mathbf{M}_2), \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{P}] + [\mathbf{M}_1 + \nu\mathbf{M}_2, d\mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{P}] +\\ + [\mathbf{M}_1 + \nu\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, d\mathbf{M}_4, \mathbf{P}] = 0\end{aligned} \tag{20}$$

эти значения, получим:

$$(\mathbf{M}_1 + \nu\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_{3_u}du + \mathbf{M}_{3_v}dv, \mathbf{M}_4, \mathbf{M}_3) = 0,$$
$$(\mathbf{M}_1 + \nu\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_{4_u}du + \mathbf{M}_{4_v}dv, \mathbf{M}_4) = 0,$$

или, пользуясь таблицей (2):

$$\left.\begin{aligned}\nu(m\,du + R\,dv) &= n\,du + N\,dv,\\ \nu(N_1du + n_1dv) &= R_1du + m_1dv,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где $du:dv$ соответствует перемещению вдоль развертывающейся поверхности, огибаемой плоскостью (19).

Исключая отсюда ν, получим дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей конгруэнции $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$:

$$(mR_1 - nN_1)\,du^2 + (mm_1 + RR_1 - NN_1 - nn_1)\,du\,dv + \\ + (Rm_1 - n_1N)\,dv^2 = 0. \tag{22}$$

Исключая $du:dv$, получим уравнение, определяющее ν, т. е. фокальные плоскости

$$\nu^2(mn_1 - RN_1) + \nu(RR_1 - mm_1 - nn_1 + NN_1) + nm_1 - NR_1 = 0. \tag{23}$$

Наконец, если в уравнении (20) считать дифференцирование в произвольном направлении, то оно будет удовлетворяться координатами фокуса $\mathbf{P} = \mathbf{M}_3 + \sigma\mathbf{M}_4$. Полагая один раз дифференцирование вдоль линии u, другой раз вдоль линии v и пользуясь таблицей (2), получим

$$\nu m - R = \sigma(\nu N_1 - n_1),$$
$$\nu n - N = \sigma(\nu R_1 - m_1);$$

откуда, исключая ν,

$$\sigma^2(N_1m_1 - n_1R_1) + \sigma(RR_1 - mm_1 + nn_1 - NN_1) + mN - Rn = 0. \tag{24}$$

Такие же уравнения определяют развертывающиеся поверхности, фокусы $\mathbf{M}_3' + \sigma'\mathbf{M}_4'$ и фокальные плоскости $(\mathbf{M}_3', \mathbf{M}_4', \mathbf{M}_1' + \nu'\mathbf{M}_2')$ конгруэнции $(\mathbf{M}_3'\mathbf{M}_4')$ второй пары. Если эти уравнения преобразовать по формулам (14a, b), то заметим, что уравнение (22) сохранится неизменным, а уравнения (23) и (24) дадут соотношения:

$$\nu'\vartheta = \nu, \quad \sigma' = \sigma\vartheta.$$

Формула (13) показывает, что при наложении фокусы $\mathbf{M}_3 + \sigma\mathbf{M}_4$ и $\mathbf{M}_3' + \sigma'\mathbf{M}_4'$ и фокальные плоскости совпадают.

Обратная теорема не верна: соответствие развертывающихся поверхностей, фокусов и фокальных плоскостей обеих конгруэнций первой и второй пары недостаточно, чтобы пары налагались. Сохранение уравнений (22), (23), (24) дает 6 условий на компоненты обеих пар, в то время как система (14a, b) содержит 8 уравнений.

Заметим еще, что если развертывающиеся поверхности обеих конгруэнций первой пары соответствуют друг другу, то тем же свойством обладает и вторая пара. Если фокусы одной из двух ассоциированных конгруэнций лежат в фокальных плоскостях другой, то это свойство сохраняется при изгибании.

§ 5. Изгибаемая пара конгруэнций в преобразовании T

Особо интересен случай, когда фокусы каждой из конгруэнций пары лежат в фокальных плоскостях другой. Тогда прямые, соединяющие соответствующие фокусы, касаются в этих точках обеих

фокальных поверхностей, т. е. косой четырехугольник $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3$ описывает своими сторонами 4 конгруэнции с последовательно общими фокальными полостями. Такая конфигурация четырех конгруэнций называется конфигурацией (T), иначе, противоположные конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ и $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ связаны преобразованием T [см. ([4]), стр. 59 и сл.]. Следовательно, мы ставим задачу: когда преобразование T дает ассоциированную конгруэнцию?

Заметим прежде всего, что пара конгруэнций в преобразовании T при совместном изгибании (если оно возможно) сохраняет это свойство. Действительно, если четырехугольник $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3$ описывает конфигурацию (T), то поверхности $(\mathbf{M}_3)$ и $(\mathbf{M}_4)$ имеют касательными плоскостями $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ и $(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3)$. В таком случае производные $\mathbf{M}_{3_u}$ и $\mathbf{M}_{3_v}$ в разложении по вершинам тетраедра не содержат компонентов по вершине $\mathbf{M}_2$, а $\mathbf{M}_{4_u}$, $\mathbf{M}_{4_v}$ по $\mathbf{M}_1$. Таблица (2) дает для характеристики конфигурации (T) равенства:

$$n = 0, \quad n_1 = 0, \quad N = 0, \quad N_1 = 0. \tag{25}$$

Система (14b) прямо показывает, что эти условия сохраняются при изгибании.

Внося значения (25) и (14a) в уравнения (3a—f), (3a′—f′), получим систему:

$$p'_u = \delta'\delta'_1 - q'q'_1 - m, \qquad p'_{1_v} = \delta'\delta'_1 - q'q'_1 - m_1, \tag{26a′}$$
$$P'_u = \Delta'\Delta'_1 - q'q'_1 - m, \qquad P'_{1_v} = \Delta\Delta_1 - qq_1 - m_1, \tag{26b′}$$
$$\delta'_v = q'_u + p'\delta' + p'_1 q', \qquad \delta'_{1_u} = q'_{1_v} + p'_1\delta'_1 + p'q'_1, \tag{26c′}$$
$$\Delta'_u = q'_v + P'_1\Delta' + P'q', \qquad \Delta'_{1_v} = q'_{1_u} + P'\Delta'_1 + P'_1 q'_1, \tag{26d′}$$
$$R_u = m_v + m(P' + p'), \qquad R_{1_v} = m_{1_u} + m_1(P'_1 + p'_1), \tag{26e′}$$
$$R\delta' - R_1\Delta' = q'(m - m_1), \qquad R_1\delta'_1 - R\Delta'_1 = q'_1(m_1 - m). \tag{26f′}$$

Сюда надо добавить такие же уравнения для компонентов без штрихов, которые мы будем обозначать (26a—f).

Если m и m_1 не нули, то, сравнивая (26e′) и (26e), получим:

$$P' + p' = P + p, \quad P'_1 + p'_1 = P_1 + p_1. \tag{27}$$

Определяя отсюда P', P'_1 и внося в (26b′), с помощью (26a′, a, b), получим единственное уравнение:

$$\Delta'\Delta'_1 + \delta'\delta'_1 - 2q'q'_1 = \Delta\Delta_1 + \delta\delta_1 - 2qq_1. \tag{28}$$

Если ввести новые независимые переменные

$$\alpha = \alpha(u, v), \quad \beta = \beta(u, v),$$

то уравнения (26a′), (26a, b) можно разрешить относительно производных от p, p_1, P, P_1, p', p'_1 по α. Дифференцируя по α (26 f, f′), (28) и присоединяя к уравнениям (26 c, c′, d, d′, e), мы можем разрешить полученную систему относительно производных по α от

Δ, Δ_1, δ, δ_1, q, q_1, q', q_1', R, R_1, $m\varepsilon - m_1$, Δ', Δ_1', δ', δ_1', если определитель системы

$$\left\{2\frac{\delta\Delta_1 - \delta'\Delta_1'}{\varphi^2} + 2\varepsilon(\Delta\delta_1 - \Delta'\delta_1')\varphi^2 + \right.$$
$$+ 3(\varepsilon+1)(\Delta\Delta_1 + \delta\delta_1 - \Delta'\Delta_1' - \delta'\delta_1') -$$
$$- (\varepsilon+3)\frac{q\Delta_1 + q_1\delta - q'\Delta_1' - q_1'\delta'}{\varphi} -$$
$$\left. - (3\varepsilon+1)(q\delta_1 + q_1\Delta - q'\delta_1' - q_1'\Delta')\varphi\right\}\left(R\varphi - \frac{R_1}{\varphi} + m_1 - m\right), \tag{29}$$

где $\varepsilon = \mathrm{const}$ (любое постоянное) и $\varphi = \frac{\alpha_u}{\alpha_v}$, не равен нулю. Следовательно, можно задать $m\varepsilon + m_1$ как произвольную функцию двух аргументов и, кроме того, начальные значения 16 неизвестных функций, например Δ, Δ_1, δ, δ_1, Δ', Δ_1', δ', δ_1', R, R_1, p, p_1, p', p_1', P, P_1, $m\varepsilon - m_1$, для $\alpha = \alpha_0$ как функции одного аргумента β. Величины q, q_1, q', q_1', P', P_1' и δ_1' определяются в конечном виде уравнениями (26 f, f'), (27) и (28).

Мы увидим в дальнейшем (§ 8), что всякая пара конгруэнций в преобразовании T налагается на пару взаимно-полярную. Если это оставить в стороне, то, так как произвольная конгруэнция зависит от двух произвольных функций двух аргументов, а допускающие совместное изгибание две конгруэнции в преобразовании T зависят только от одной функции двух аргументов,—не всякая конгруэнция допускает преобразование T в ассоциированную конгруэнцию.

§ 6. Замечательные конфигурации (T)

Возможность произвольного задания функции $m\varepsilon + m_1$, где ε — любое постоянное, позволяет найти ассоциированные пары конгруэнций в особо замечательной конфигурации (T). Таких конфигураций две. Если

$$m = m_1, \tag{30}$$

то уравнение (26 f), если R, R_1 не нули, дает

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0, \tag{31}$$

а это показывает, что конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ есть конгруэнция W. Действительно, асимптотические линии на поверхности $(\mathbf{M}_1)$ определяются уравнением

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_{1_u}\mathbf{M}_{1_v}d^2\mathbf{M}_1) = 0,$$

которое с помощью таблицы (2) можно переписать в виде

$$\delta du^2 - \Delta dv^2 = 0. \tag{32a}$$

Точно так же найдем, что асимптотические линии на $(\mathbf{M}_2)$ определяются уравнением

$$\Delta_1 du^2 - \delta_1 dv^2 = 0. \tag{32b}$$

Эти асимптотические в силу (31), очевидно, соответствуют. Точно так же докажем [см. ([4]), стр. 73], что асимптотические на ($\mathbf{M}_3$) и ($\mathbf{M}_4$) определяются тем же уравнением (32a). Таким образом четыре конгруэнции конфигурации суть конгруэнции W и сама конфигурация совпадает с той, которая получается в теореме Бианки о переместительности асимптотических преобразований. Такая конфигурация называется [см. ([4]), стр. 75] конфигурацией Бианки.

Система (26 a—f, a′—f′) и (30) определяет конфигурации Бианки с ассоциированной парой противоположных конгруэнций с 16 произвольными функциями одного аргумента. Налагающаяся пара тоже принадлежит к некоторой конфигурации Бианки.

Другая замечательная конфигурация определяется уравнением

$$m + m_1 = 0. \tag{33}$$

В этом случае [см. ([4]), стр. 76 и ([3]), стр. 314 и сл.] пара конгруэнций ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$), ($\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$) расслояема, т. е. существуют два семейства ∞' поверхностей $\sum$ и $\sum'$, так что касательные плоскости к каждой поверхности $\sum$ в точках пересечения с $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ проходят через $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$, а касательные плоскости к $\sum'$ в точках пересечения с $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ через $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$.

Система (26 a—f, a′—f′), (33) определяет расслояемые ассоциированные пары с 16 произвольными функциями одного аргумента. Налагающиеся пары тоже расслояемы.

Если расслояемая пара состоит из двух конгруэнций, принадлежащих одному и тому же линейному комплексу, то компоненты тетраедра удовлетворяют, кроме уравнений (25) и (33), еще условиям [см. ([3]), стр. 50]

$$\Delta = \delta_1, \quad \Delta_1 = \delta, \quad q = q_1, \quad P = p, \quad P_1 = p_1. \tag{34}$$

Допустим, что налагающаяся пара того же рода, т. е. удовлетворяет условиям (34), написанным для компонентов со штрихами. Тогда система (26 a—f, a′—f′), (27), (28) принимает вид:

$$p_u = \delta\delta_1 - q^2 - m, \qquad p_{1_v} = \delta\delta_1 - q^2 + m, \tag{35a}$$

$$\delta_v = q_u + p\delta + p_1 q, \qquad \delta_{1_u} = q_v + p_1\delta_1 + p q_1, \tag{35b}$$

$$R_u = m_v + 2mp, \qquad R_{1_v} = -m_u - 2mp_1, \tag{35c}$$

$$R\delta - R_1\delta_1 = 2mq, \tag{35d}$$

$$p'_u = \delta'\delta'_1 - q'^2 - m, \qquad p'_{1_v} = \delta'\delta'_1 - q'^2 + m, \tag{35a′}$$

$$\delta'_v = q'_u + p'\delta' + p'_1 q', \qquad \delta'_{1_u} = q'_v + p'_1\delta'_1 + p'q', \tag{35b′}$$

$$R\delta' - R_1\delta'_1 = 2mq', \tag{35d′}$$

$$p' = p, \quad p'_1 = p_1, \qquad \delta'\delta'_1 - q'^2 = \delta\delta_1 - q^2. \tag{35e}$$

Она определяет искомые пары с 10 произвольными функциями одного аргумента.

§ 7. Первый особый случай.

Конгруэнции W с двумя линейчатыми фокальными поверхностями

Определитель системы (29) состоит из двух множителей. Первый множитель обратится в нуль при всяком выборе φ и ε, если

$$\delta\Delta_1 = \delta'\Delta_1', \qquad \Delta\delta_1 = \Delta'\delta_1', \tag{36a}$$

$$\Delta\Delta_1 + \delta\delta_1 = \Delta'\Delta_1' + \delta'\delta_1', \tag{36b}$$

$$q\Delta_1 + q_1\delta = q'\Delta_1' + q_1'\delta', \quad q\delta_1 + q_1\Delta = q'\delta_1' + q_1'\Delta'. \tag{36c}$$

Возвышая (36b) в квадрат и вычитая учетверенное произведение уравнений (36a), получим:

$$(\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1)^2 = (\Delta'\Delta_1' - \delta'\delta_1')^2,$$

откуда или

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = \Delta'\Delta_1' - \delta'\delta_1'$$

и следовательно,

$$\Delta\Delta_1 = \Delta'\Delta_1', \quad \delta\delta_1 = \delta'\delta_1', \tag{37}$$

или

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = -\Delta'\Delta_1' + \delta'\delta_1'$$

и значит,

$$\Delta\Delta_1 = \delta'\delta_1', \quad \Delta'\Delta_1' = \delta\delta_1. \tag{38}$$

В первом случае мы можем разрешить уравнения (36a), (37), вводя вспомогательную функцию t:

$$\delta' = t\delta, \quad \Delta' = t\Delta, \quad \delta_1' = \frac{\delta_1}{t}, \quad \Delta_1' = \frac{\Delta_1}{t}. \tag{39}$$

Внося эти значения в (36 c), получим:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{q'}{t} - q\right)\Delta_1 + (q_1't - q_1)\delta = 0, \\ \left(\frac{q'}{t} - q\right)\delta_1 + (q_1't - q_1)\Delta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

откуда или

$$q' = tq, \quad q_1' = tq_1 \tag{41}$$

или

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0. \tag{42}$$

Остановимся на первой возможности. Внося значения (39), (41) в уравнения (26a′) и сравнивая с (26a), получим:

$$p_u' = p_u, \quad p_{1_v}' = p_{1_v}.$$

Следовательно, $p' - p$ есть функция одного v, а $p_1' - p_1$ одного u. Меняя нормирование вершин второго тетраедра $[\mathbf{M}']$ по формулам (4), мы приведем эти разности к нулю, и следовательно, в силу (27) получим:

$$p' = p, \quad p_1' = p_1, \quad P' = P, \quad P_1' = P_1. \tag{43}$$

Внося теперь значения (39), (41), (43) в уравнения (26c′, d′) и пользуясь (26c, d), получим:

$$\left.\begin{aligned} t_v\,\delta - t_u\,q = 0, \qquad t_u\,\delta_1 - t_v\,q_1 = 0, \\ t_u\,\Delta - t_v\,q = 0, \qquad t_v\,\Delta_1 - t_u\,q_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Отсюда или
$$t_u = 0, \quad t_v = 0,$$
т. е. t есть постоянное, которое можно привести к единице новым нормированием вершин $\mathbf{M}'_i$ [не нарушая равенств (43)] и тогда все компоненты [$\mathbf{M}'$] совпадают с компонентами [$\mathbf{M}$], т. е. обе пары проективно эквивалентны, или
$$\Delta\delta = q^2, \quad \Delta_1\delta_1 = q_1^2, \quad \delta\delta_1 = qq_1, \quad \Delta\Delta_1 = qq_1. \tag{45}$$

При этом условии пара конгруэнций в конфигурации (T) изгибаема. Все уравнения системы (26a′—f′) сведутся к одному уравнению, например, первому уравнению (44) на неизвестную функцию t, которое и определит ее с одной произвольной функцией одного аргумента. Нетрудно теперь заметить, что направление лучей $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ совпадает с асимптотическими направлениями поверхностей ($\mathbf{M}_1$) и ($\mathbf{M}_2$). Действительно, из таблицы (2) получим:
$$\mathbf{M}_{1_u} q - \mathbf{M}_{1_v} \delta = -\delta p \mathbf{M}_1 - \delta \mathbf{M}_3;$$
следовательно, луч $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ касается на поверхности ($\mathbf{M}_1$) линии
$$\delta du + q dv = 0 \tag{46}$$
и в силу (45) это значение $du:dv$ удовлетворяет уравнению (32a), определяющему асимптотические линии на поверхности ($\mathbf{M}_1$). Конгруэнция асимптотических касательных имеет только одну полость фокальной поверхности, между тем как луч $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ имеет по крайней мере два различных фокуса $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_3$. Следовательно, конгруэнция ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$) вырождается.

Нетрудно проверить, что линии (46) на поверхности ($\mathbf{M}_1$) — прямые, поверхность ($\mathbf{M}_1$) — линейчатая и конгруэнция ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$) совпадает с семейством прямолинейных образующих ее. Поверхность ($\mathbf{M}_3$) совпадает с поверхностью ($\mathbf{M}_1$) так, что точки $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_3$ расположены на одной прямолинейной образующей. Поверхности ($\mathbf{M}_2$) и ($\mathbf{M}_4$) тоже совпадают и точки $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_4$ лежат на одной прямолинейной образующей $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$. Образующие $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ соответствуют друг другу.

Конфигурация (T) вырождается. Пара конгруэнций состоит из конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями и второй конгруэнции тоже W с теми же самыми фокальными поверхностями, которая в частности может совпадать с первой. Соответствующие лучи касаются каждой фокальной поверхности в точках, лежащих на одной образующей.

§ 8. Второй особый случай.

Две пары взаимно-полярные

Если имеет место равенство (42), то оба случая (37) и (38) совпадают.

Вводя вспомогательную функцию ν, мы можем представить уравнения (36a), (38) в виде

$$\delta' = \nu\Delta_1, \quad \delta_1' = \frac{\Delta}{\nu}, \quad \Delta' = \nu\delta_1, \quad \Delta_1' = \frac{\delta}{\nu}. \tag{47}$$

Внося эти значения в (36b), получим:

$$\left(\frac{q'}{\nu} - q_1\right)\delta + (q_1'\nu - q)\,\Delta_1 = 0, \tag{48}$$

$$\left(\frac{q'}{\nu} - q_1\right)\Delta + (q_1'\nu - q)\,\delta_1 = 0, \tag{49}$$

откуда или

$$q' = \nu q_1, \quad q_1' = \frac{q}{\nu},$$

или

$$\Delta\Delta_1 = \delta\delta_1.$$

В этом последнем случае, вводя новую вспомогательную функцию τ, можно представить уравнения (48) в виде

$$q' = \nu(q_1 + \Delta_1\tau), \quad q_1' = (q - \delta\tau)\frac{1}{\nu}. \tag{50}$$

Между тем уравнение (28) в силу (38) дает

$$q'q_1' = qq_1.$$

Внося сюда значения (50), получим, если τ не нуль,

$$\tau = \frac{q}{\delta} - \frac{q_1}{\Delta_1}$$

и, следовательно, выражения (50) принимают вид:

$$q' = \nu\frac{\Delta_1}{\delta}q, \quad q_1' = \frac{1}{\nu}\frac{\delta}{\Delta_1}q_1. \tag{50'}$$

Если ввести новую функцию

$$t = \nu\frac{\Delta_1}{\delta},$$

то уравнения (47), (50') совпадут с уравнениями (39), (41). Если же τ равно нулю, то уравнения (50) совпадут с уравнениями (49).

Внося значения (47), (49) в уравнения (26a'), (26b), получим:

$$p_u' = P_u, \quad p_{1_v}' = P_{1_v}.$$

Следовательно, $p' - P$ есть функция одного v, $p_1' - P_1$ одного u. Нормируя вершины $\mathbf{M}_i'$ по формулам (4), мы приведем обе эти функции к нулю. Уравнение (27) дает тогда

$$p' = P, \quad p_1' = P_1, \quad P' = p, \quad P_1' = p_1. \tag{51}$$

Внося теперь значения (47), (49), (51) в уравнения (26c', d') и пользуясь (26c, d), получим:

$$\left.\begin{aligned} \nu_v\,\Delta_1 &= \nu_u\,q_1, \qquad \nu_u\,\Delta = \nu_v\,q, \\ \nu_u\,\delta_1 &= \nu_v\,q_1, \qquad \nu_v\,\delta = \nu_u\,q. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Если эти уравнения не определяют ν_u, ν_v, то мы снова получим уравнение (45). В противном случае

$$\nu_u = 0, \quad \nu_v = 0;$$

ν есть постоянное, которое опять можно привести к единице новым нормированием тетраедра $[\mathbf{M}']$. Итак, произвольная конгруэнция и ее преобразование T изгибаемы и налагающаяся пара определяется условиями:

$$\left.\begin{array}{c} \delta' = \Delta_1, \quad \Delta' = \delta_1, \quad \delta_1' = \Delta, \quad \Delta_1' = \delta, \\ q' = q_1, \quad q_1' = q, \quad p' = P, \quad p_1' = P_1, \quad P' = p, \quad P_1' = p_1. \end{array}\right\} \tag{53}$$

Геометрический смысл уравнений (52) чрезвычайно прост. Нетрудно заметить, что грани тетраедра $[\mathbf{M}]$ определяются тангенциальными координатами

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{m}_1 = \rho(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4), & \mathfrak{m}_2 = \rho(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3), \\ \mathfrak{m}_3 = \rho(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4), & \mathfrak{m}_4 = \rho(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3), \end{array}\right\} \tag{54}$$

где ρ — произвольный множитель и каждая скобка $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k\mathbf{M}_l)$ обозначает один из четырех миноров матрицы, составленной из четырех однородных координат точек $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_l$.

Дифференцируя (54) и пользуясь таблицей (2), мы составим новую таблицу компонентов проективных перемещений тетраедра $[\mathbf{M}]$ для тангенциальных координат его граней. Если множитель пропорциональности ρ определить уравнениями

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial u} = P_1 - p_1, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial v} = P - p, \tag{55}$$

которые образуют вполне интегрируемую систему в силу (3а), то искомая таблица компонентов примет вид:

	$\mathfrak{m}_1$	$\mathfrak{m}_2$	$\mathfrak{m}_3$	$\mathfrak{m}_4$
$\mathfrak{m}_{1_u}$	0	Δ_1	0	0
$\mathfrak{m}_{2_u}$	q	P_1	0	1
$\mathfrak{m}_{3_u}$	m	N_1	0	$-q_1$
$\mathfrak{m}_{4_u}$	n	R_1	$-\delta$	$-p_1$

	$\mathfrak{m}_1$	$\mathfrak{m}_2$	$\mathfrak{m}_3$	$\mathfrak{m}_4$
$\mathfrak{m}_{1_v}$	P	q_1	1	0
$\mathfrak{m}_{2_v}$	Δ	0	0	0
$\mathfrak{m}_{3_v}$	R	n_1	$-p$	$-\delta_1$
$\mathfrak{m}_{4_v}$	N	m_1	$-q$	0

(56)

Нетрудно заметить, что таблица (56) в силу равенств (14а), (45) и (53) совпадает с таблицей компонентов (2) тетраедра $[\mathbf{M}']$. Совершим теперь коррелятивное преобразование пространства так, чтобы грани $\mathfrak{m}_i$ тетраедра $[\mathbf{M}]$ в его начальном положении перешли в вершины $\mathbf{M}_i'$ соответствующего тетраедра $[\mathbf{M}']$. Тогда очевидно все тетраедры $[\mathbf{M}]$ преобразуются в соответствующие тетраедры $[\mathbf{M}']$

и пара конгруэнций ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$), ($\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$) будет преобразована в пару ($\mathbf{M}_1'\mathbf{M}_2'$), ($\mathbf{M}_3'\mathbf{M}_4'$). Итак, любая пара конгруэнций, находящихся в отношении преобразования T, проективно изгибаема и налагается на пару конгруэнций, получаемых произвольным коррелятивным преобразованием.

Обратно, чтобы пара конгруэнций [$\mathbf{M}$] налагалась на коррелятивную ей пару [$\mathbf{M}'$], надо, чтобы соотношения на компоненты обеих пар, получаемые из сравнения таблиц (2) и (56), были совместны с основными соотношениями (14a, b). Нетрудно заметить, что соотношения (14a) удовлетворены. Что же касается условий на компоненты n, n_1, N, N_1, то сравнение таблиц (56) и (2) дает

$$n' = N_1, \quad n_1' = N, \quad N' = n_1, \quad N_1' = n.$$

Сопоставляя их с (14b), получим два уравнения

$$N_1 = \vartheta n, \quad n_1 = \vartheta N,$$

откуда, исключая ϑ, получим

$$nn_1 = NN_1. \tag{57}$$

Если условие (57) удовлетворено, то пара конгруэнций [$\mathbf{M}$] наложима на коррелятивную ей пару [$\mathbf{M}'$]. Какова бы ни была первая конгруэнция ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$), к ней можно подобрать вторую ($\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$) с тремя произвольными функциями двух аргументов, чтобы получаемая пара удовлетворяла поставленному требованию.

§ 9. Третий особый случай.

Пара конгруэнций, взаимных относительно нуль-системы линейного комплекса

Второй множитель определителя (29) обращается в нуль независимо от значений φ, если

$$R = 0, \quad R_1 = 0, \quad m = m_1. \tag{58}$$

Уравнения (26 f′) при условии (58) исчезают тождественно. Если $m = m_1 = 0$, то прямая $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ неподвижна. Если m, m_1 не нули, то уравнения (26e′) дают попрежнему

$$P' + p' = P + p, \quad P_1' + p_1' = P_1 + p_1. \tag{59}$$

Исключая P', P_1' из (26b′), опять получим

$$\Delta'\Delta_1' + \delta'\delta_1' - 2q'q_1' = \Delta\Delta_1 + \delta\delta_1 - 2qq_1. \tag{60}$$

Мы можем задать q' как произвольную функцию двух переменных, исключить q_1' с помощью (60), и тогда система (26a′), (26c′), (26d′) определит p', p_1', Δ', Δ_1', δ', δ_1' с 6 произвольными функциями одного аргумента.

Итак, пара конгруэнций, определяемая уравнениями (25), (58),

всегда изгибаема, и налагающаяся на нее пара зависит от одной произвольной функции двух аргументов.

Легко видеть, что обе конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)$ и $(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4)$ принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

Принадлежность лучей $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ линейному комплексу можно записать в виде уравнений:

$$\sum c(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) = 0, \qquad \sum c(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4) = 0, \tag{61a}$$

где суммирование идет по всем координатам прямой и c (индексы которых опущены) суть постоянные числа—коэффициенты в уравнении комплекса.

Если лучи конгруэнции принадлежат линейному комплексу, то и весь пучок прямых, расположенный в фокальной плоскости с центром в фокусе, принадлежит комплексу, ибо два бесконечно близких луча конгруэнции, пересекающихся в фокусе, принадлежат такому пучку.

Так как вершины четырехугольника $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3$—фокусы наших конгруэнций, а плоскости его смежных сторон—фокальные плоскости, то лучи $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$ тоже принадлежат комплексу; следовательно

$$\sum c(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4) = 0, \qquad \sum c(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) = 0. \tag{61b}$$

Равенства (61a, b) должны соблюдаться при всех изменениях u, v, ибо все лучи конгруэнции принадлежат комплексу. Поэтому их можно дифференцировать. Помня, что $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$ есть определитель, имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k) = (\mathbf{M}_{i_u}\mathbf{M}_k) + (\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{k_u}).$$

Пользуясь таблицей (2) и принимая во внимание (25), получим:

$$R_1\sum c(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = 0, \qquad R\sum c(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = 0, \tag{61c}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum c(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + m_1\sum c(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = 0,\\ \sum c(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + m\sum c(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{61d}$$

Так как лучи $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ не могут принадлежать комплексу (плоскости, сопряженные точками $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_3$ относительно комплекса, суть $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$; следовательно, $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ взаимны относительно нуль-системы комплекса), то из (61c, d) следует (58). Дифференцируя еще раз (63d), придем к тождеству в силу (3e).

Обратно, при условии (25), (58), все шесть координат

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) = x,\quad (\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4) = y,\quad (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4) = z,\quad (\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) = t,\\ (\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) + m(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = \varphi\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

удовлетворяют вполне интегрируемой системе линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_u &= -qz + \delta t, & x_v &= (p-P)x - \Delta z + qt, \\ y_u &= (p_1 - P_1)y + q_1 z - \Delta_1 t, & y_v &= \delta_1 z - q_1 t, \\ z_u &= -\Delta_1 x + \delta y - P_1 z, & z_v &= -q_1 x + qy + pz + \varphi, \\ t_u &= q_1 x - qy + p_1 t - \varphi, & t_v &= \delta_1 x - \Delta y - Pt, \\ \varphi_u &= 2mz - P_1\varphi, & \varphi_v &= -2mt - P\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Следовательно, всякие 6 решений связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами, т. е. имеют место уравнения (63a, b, d).

Итак, пара конгруэнций, взаимных относительно линейного комплекса, изгибаема и налагающаяся пара (того же рода) зависит от одной произвольной функции двух аргументов.

§ 10. Периодическая с периодом 4 последовательность Лапласа

Результат изменится, если

$$R = 0, \quad R_1 = 0 \qquad (64)$$

и m не равно m_1. Тогда уравнения (26 f, f′) дадут

$$q = 0, \quad q_1 = 0, \quad q' = 0, \quad q_1' = 0, \qquad (65)$$

уравнения (26 e, e′) дадут, если m и m_1 не нули,

$$P' + p' = P + p, \quad P_1' + p_1' = P_1 + p_1.$$

Допустим, чтобы упростить рассуждения,

$$p' = p, \quad p_1' = p_1, \quad P' = P, \quad P_1' = P_1,$$

тогда уравнения (26a′, b′, a, b) дадут

$$\Delta'\Delta_1' = \Delta\Delta_1, \quad \delta'\delta_1' = \delta\delta_1, \qquad (66)$$

а уравнения (26c′, d′, c, d) после интегрирования

$$\delta' = U\delta, \quad \delta_1' = V\delta_1, \quad \Delta' = V_1\Delta, \quad \Delta_1' = U_1\Delta_1,$$

где U, U_1, V, V_1—функции одного u или одного v.

В силу (66)

$$U = \frac{1}{V} = c, \qquad V_1 = \frac{1}{U_1} = c_1$$

суть постоянные. Одно из них можно привести к единице, меняя нормирование вершин тетраедра $[\mathbf{M}']$, но другое останется; если оно не равно единице, то вторая пара $[\mathbf{M}']$ проективно отлична от первой; следовательно, пара конгруэнций, определяемая условиями (25), (64) при $m \gtrless m_1$, изгибаема.

Нетрудно выяснить геометрический смысл этих условий. Таблица (2) дает теперь

$$\mathbf{M}_{1u} = \delta\mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_{1v} = p\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3, \quad \mathbf{M}_{3u} = m\mathbf{M}_1, \quad \mathbf{M}_{3v} = -P\mathbf{M}_3 - \Delta\mathbf{M}_4;$$

следовательно, развертывающиеся поверхности всех четырех кон-

груэнций $M_1M_2M_4M_3$ суть $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, т. е. каждая конгруэнция является преобразованием Лапласа двух соседних, а вся конфигурация представляет периодическую (с периодом 4) последовательность Лапласа.

Обратно, если четырехугольник $M_1M_2M_4M_3$ описывает периодическую последовательность Лапласа, то, очевидно, имеют место уравнения (25), (64), (65). Будут ли m и m_1 равны между собой или различны, пара конгруэнций будет изгибаема, но если $m \gtrless m_1$, то она наложима на пару того же рода (с компонентами $q' = q_1' = 0$), а если m равно m_1, то у налагающейся пары q', q_1' могут быть отличны от нуля, т. е. налагающаяся пара не дает периодической последовательности Лапласа.

Итак, пара противоположных конгруэнций периодической с периодом 4 последовательности Лапласа всегда изгибаема и налагается на пару того же рода. Исключение составляет только пара конгруэнций, взаимных относительно линейного комплекса; она тоже изгибаема и налагается на пару, взаимную относительно комплекса, но она может и не входить как пара противоположных конгруэнций в периодическую последовательность Лапласа.

§ 11. Четвертый особый случай.

Сопряженная расслояемая пара

Нам осталось рассмотреть еще один случай, ранее исключенный,—когда R и R_1 отличны от нуля, но

$$m = m_1 = 0. \tag{67}$$

Уравнения (26 e, e′) принимают вид

$$R_u = 0, \quad R_{1_v} = 0;$$

следовательно, R есть функция одного v, R_1 — одного u и в силу (26 f) отношение $\frac{\Delta R}{\delta R_1}$ можно привести, меняя параметры u, v, к единице, а $R = R_1$ к любой постоянной.

Уравнения (26 f, f′) дадут

$$\Delta = \delta, \quad \Delta_1 = \delta_1, \quad \Delta' = \delta', \quad \Delta_1' = \delta_1'. \tag{68}$$

Если первая конгруэнция первой пары удовлетворяет соотношениям (68), то уравнения (26a—d) определят вторую конгруэнцию этой пары с 4 произвольными постоянными. Уравнения (26a′—d′) определят вторую пару с 4 произвольными функциями одного аргумента.

Что касается геометрического смысла получаемой пары, то уравнения (68) характеризуют [см. ([3]), стр. 376] конгруэнцию R.

Уравнения (25), (67) характеризуют две конгруэнции R, образующие расслояемую сопряженную пару. Каждый луч любой

конгруэнции пары несет ∞^1 точек, описывающих поверхности, касательные плоскости которых проходят через соответствующий луч второй конгруэнции. Развертывающиеся поверхности обеих конгруэнций соответствуют друг другу. Очевидно, вторая пара является произвольной парой того же класса с тем же значением постоянной $R = R_1$.

Итак, сопряженная расслояемая пара конгруэнций допускает совместное изгибание и налагается на любую пару того же рода при единственном условии сохранения значения постоянного $R = R_1$. Так как при изменении постоянного $R = R_1$ конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ проективно изгибается, то можно сказать, что пара $[\mathbf{M}]$ налагается на произвольную сопряженную пару или на пару, полученную из нее изгибанием первой конгруэнции.

§ 12. Изгибание 2-го порядка для первой конгруэнции пары

Вернемся к рассуждениям § 2 и посмотрим, не может ли случиться, чтобы наложение 1-го порядка для пары конгруэнций повышалось для первой конгруэнции пары до 2-го порядка.

Уравнение (7а) в таком случае должно удовлетворяться до членов 2-го порядка включительно. К уравнениям (8а—с) присоединится еще уравнение

$$d^2(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) = \lambda d^2(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + 2(\lambda_1 du + \lambda_2 dv)\, d(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + \\ + (\lambda_{11}du^2 + 2\lambda_{12}du\, dv + \lambda_{22}dv^2)(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2),$$

где λ_{ik} — множители пропорциональности. Разбивая это уравнение на три уравнения сообразно трем дифференциалам du^2, $dudv$, dv^2, получим:

$$\begin{aligned}(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)_{uu} &= \lambda(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)_{uu} + 2\lambda_1(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)_u + \lambda_{11}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2),\\ (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)_{uv} &= \lambda(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)_{uv} + \lambda_1(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)_v + \lambda_2(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)_u + \lambda_{12}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2),\\ (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)_{vv} &= \lambda(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)_{vv} + 2\lambda_2(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)_v + \lambda_{22}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2).\end{aligned}$$

Если подсчитать производные с помощью таблицы (2), заменить координаты $\mathbf{N}_i$ через $\mathbf{M}_i$ по формулам (9), сравнить члены с одинаковыми скобками $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$ и принять во внимание равенства (10), (12а—с), (13), (14а, b), то получим систему:

$$\delta' = \vartheta\delta, \quad \delta_1' = \frac{\delta_1}{\vartheta}, \quad \Delta' = \vartheta\Delta, \quad \Delta_1' = \frac{\Delta_1}{\vartheta}, \tag{69a}$$

$$q' = \vartheta q, \quad q_1' = \frac{q_1}{\vartheta}, \tag{69b}$$

$$p' + P' = p + P, \quad p_1' + P_1' = p_1 + P_1. \tag{69c}$$

Эти уравнения совпадают с системой (39), (41). Но теперь их надо рассматривать совместно с системой (3а—f′), написанной для первого $[\mathbf{M}]$ и второго $[\mathbf{M}']$ тетраэдра. Для краткости мы будем обозначать штрихами (3а′—f′) уравнения, написанные для второго тетраэдра.

Исследование системы (3a—f), (3a′—f′), (14a, b), (69a—c) ведется так же, как это мы делали в § 7 для системы (26a—f). Уравнения (3a, a′) показывают, что $p'-p$ и $p_1'-p_1$ суть функции одного v и одного u. Нормированием вершин второго тетраедра мы приводим их к нулю. Следовательно,

$$p'=p,\quad p_1'=p_1,\quad P'=P,\quad P_1'=P_1. \tag{70}$$

Уравнения (3c, d), (3c′, d′) в силу (69a, b), (14b) дают попрежнему систему (44), откуда или ϑ—постоянное, которое приводится к единице, и вторая пара проективно-эквивалентна первой, или имеют место равенства (45) и, следовательно, конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ есть конгруэнция W с двумя линейчатыми фокальными поверхностями. Вторая конгруэнция $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ может быть выбрана произвольно при одном условии, чтобы соответствующий луч пересекал обе прямолинейные образующие $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ фокальных полостей.

Действительно, уравнения (45) можно разрешить, вводя вспомогательную функцию t в виде

$$\delta=tq,\quad \delta_1=\frac{q_1}{t},\quad \Delta=\frac{q}{t},\quad \Delta_1=tq_1. \tag{71a}$$

Внося значения (14b) и (71a) в уравнения (3f′), получим:

$$n=tN,\quad n_1=\frac{1}{t}N_1. \tag{71b}$$

Уравнения (71a) очевидно не связывают величин p, p_1, но легко увидеть, что и уравнения (71b) не накладывают на них никаких связей. Если воспользоваться формулами (5a, c), (6a, b), то эти уравнения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} t_v+\frac{t_u}{t}+2t\frac{\partial\ln q}{\partial v}-2\frac{\partial\ln q}{\partial u}&=0,\\ t_v+\frac{t_u}{t}+2t\frac{\partial\ln q_1}{\partial v}-2\frac{\partial\ln q_1}{\partial u}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{71c}$$

Уравнения (71c) получаются, впрочем, непосредственно из системы (3c, d), если туда внести выражения (71a). Следовательно, если дана конгруэнция W с двумя линейчатыми фокальными полостями, то мы выбираем прямолинейные образующие за ребра $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ тетраедра.

Это приводит нас к формулам (71a). После этого мы можем выбрать p, p_1 как произвольные функции от u и v, т. е. произвольно выбрать точки $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$ на прямолинейных образующих $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$.

Этим произволом можно воспользоваться, чтобы потребовать наложение 2-го порядка и для второй конгруэнции $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$.

Так же, как и выше, эти условия запишутся в виде уравнений:

$$\begin{aligned}(\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4)_{uu}&=\mu(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)_{uu}+2\mu_1(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)_u+\mu_{11}(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4),\\ (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4)_{uv}&=\mu(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)_{uv}+\mu_1(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)_v+\mu_2(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)_u+\mu_{12}(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4),\\ (\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4)_{vv}&=\mu(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)_{vv}+2\mu_2(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)_v+\mu_{22}(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4).\end{aligned}$$

Подсчитывая производные при помощи таблицы (2), заменяя $\mathbf{N}_i$ через $\mathbf{M}_i$ по формулам (9) и сравнивая члены с одинаковыми скобками $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$, мы получим, если принять во внимание равенства (14a, b), (69a, b), (70):

$$\vartheta_u N_1 = 0, \quad \vartheta_u n = 0, \quad \vartheta_u n_1 = 0, \quad \vartheta_u N = 0,$$
$$\vartheta_v N = 0, \quad \vartheta_v n_1 = 0, \quad \vartheta_v n = 0, \quad \vartheta_v N_1 = 0.$$

Отсюда или ϑ—постоянное, которое можно привести к единице, и тогда обе пары проективно-эквивалентны, или

$$n = 0, \quad n_1 = 0, \quad N = 0, \quad N_1 = 0. \tag{72}$$

Следовательно, пара конгруэнций образует конфигурацию (T), и луч второй конгруэнции $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ касается тех же фокальных полостей, что и луч первой $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$.

§ 13. Изгибание конгруэнции целыми линейчатыми поверхностями

В § 12 мы обнаружили попутно проективное изгибание конгруэнций W с двумя линейчатыми фокальными полостями. Это изгибание обладает замечательной особенностью, которая напоминает изгибание линейчатых поверхностей. Только линейчатые поверхности могут изгибаться так, что целые линии (прямолинейные образующие) сохраняются неизменными. Перенося это на проективное изгибание конгруэнций, мы можем формулировать нашу задачу так.

По определению Картана две конгруэнции проективно наложимы, если между лучами их установлено взаимно-однозначное соответствие и к каждой паре соответствующих лучей присоединено проективное преобразование П, которое совмещает эти два луча, а их бесконечно близкие—до бесконечно малых 2-го порядка включительно. Каждой паре лучей соответствует свое проективное преобразование, отличное от всех других. Если все преобразования П, присоединенные к различным парам лучей, совпадают, то конгруэнции проективно-эквивалентны и изгибание тривиально.

Можно однако поставить задачу искать изгибания, где совпадают преобразования П, присоединенные ко всем лучам каждой линейчатой поверхности некоторого семейства линейчатых поверхностей L конгруэнции. Такое проективное преобразование совместит две соответствующие линейчатые поверхности L обеих конгруэнций; лучи бесконечно близких поверхностей будут совпадать до бесконечно малых 2-го порядка включительно. Нетрудно заметить, что такое изгибание возможно только для конгруэнций W с линейчатыми фокальными поверхностями. Действительно,

построим нормальный тетраедр рассматриваемой конгруэнции так, чтобы противоположное ребро $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ совпадало с одним из лучей этой конгруэнции, принадлежащим к той же линейчатой поверхности, как и рассматриваемый луч $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$. Тогда по условиям задачи присоединенное к паре лучей $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$ проективное преобразование Π совместит не только лучи $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$, но и лучи $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$, $\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4$, а бесконечно близкие той и другой пары будут совпадать до бесконечно малых 2-го порядка включительно. Следовательно, если рассматривать как раздельные конгруэнции, описываемые лучами $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$, то эти две конгруэнции изгибаются совместно и налагаются до 2-го порядка включительно. Мы видели, что такая пара конгруэнций состоит из двух конгруэнций W с общими линейчатыми фокальными поверхностями.

Обратно, каждая конгруэнция этого типа допускает изгибание, при котором целые линейчатые поверхности конгруэнции подвергаются только проективному преобразованию. Действительно, лучи, пересекающие пару соответствующих прямолинейных образующих, составляют, как известно, семейство образующих некоторой поверхности 2-го порядка. Если буквами x_i обозначать местные координаты относительно тетраедра $[\mathbf{M}]$, то уравнение поверхности 2-го порядка, проходящей через стороны косого четырехугольника $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3$, напишется в виде:

$$x_1x_4 + \nu x_2x_3 = 0, \tag{73}$$

где ν—произвольный множитель.

Если мы переместим тетраедр $[\mathbf{M}]$, то местные координаты неподвижной точки $\mathbf{P}$ изменятся. Дифференцируя основное равенство, являющееся определением местных координат,

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}_1x_1 + \mathbf{M}_2x_2 + \mathbf{M}_3x_3 + \mathbf{M}_4x_4,$$

пользуясь для вычисления производных от $\mathbf{M}_i$ таблицей (9) и обращая в нуль коэффициенты при $\mathbf{M}_i$, получим:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= -x_1pdv - x_2(q_1du + \delta_1dv) - x_3(mdu + Rdv) - \\ &\quad - x_4(N_1du + n_1dv), \\ dx_2 &= -x_1(\delta du + qdv) - x_2p_1du - x_3(ndu + Ndv) - \\ &\quad - x_4(R_1du + m_1dv), \\ dx_3 &= -x_1dv + x_3Pdv + x_4(\Delta_1du + q_1dv), \\ dx_4 &= -x_2du + x_3(qdu + \Delta dv) + x_4P_1du, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

где dx_i означает изменение местной координаты x_i, когда тетраедр $[\mathbf{M}]$ перемещается в направлении $du : dv$.

Допустим теперь, что тетраедр [M] перемещается так, что точки M_1 и M_2 двигаются по прямым M_1M_3, M_2M_4. Имея в виду формулы (71a) и пользуясь таблицей (2), заметим, что отношение дифференциалов $du : dv$ при этом будет:

$$du : dv = -\frac{1}{t}. \tag{75}$$

Применяя формулы (74) со значениями (71a), (72), получим уравнение поверхности 2-го порядка (73) относительно нового тетраедра [M] в виде:

$$x_4[x_1pdv + x_3(mdu + Rdv)] + x_1[x_2du - x_4P_1du] - x_2x_3d\nu + \\ + \nu x_3[x_2p_1du + x_4(R_1du + m_1dv)] + \nu x_2[x_1dv + x_3Pdv] = 0. \tag{76}$$

Если эта поверхность содержит ребра M_1M_2, M_3M_4 в их новом положении, то уравнение (76) должно удовлетворяться значениями $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Подставляя по очереди эти значения, получим:

$$du + \nu dv = 0, \quad mdu + Rdv + \nu(R_1du + m_1dv) = 0.$$

В силу (75) первое уравнение дает

$$\nu = \frac{1}{t}, \tag{77}$$

а второе обращается в тождество, если воспользоваться (3f). Новые дифференцирования приведут к тождествам. Итак, лучи конгруэнции вдоль прямолинейной образующей M_1M_3 составляют поверхность 2-го порядка:

$$tx_1x_4 + x_2x_3 = 0. \tag{73'}$$

В силу уравнений (69a, b) таким же уравнением определяется соответствующая линейчатая поверхность такой же конгруэнции второй пары [M′]. Следовательно, когда при наложении двух пар тетраедры [M] и [M′] совместятся, то эти поверхности тоже совместятся, т. е. изгибание конгруэнции (M_1M_2) будет происходить целыми линейчатыми поверхностями.

Институт математики
при Московском гос. университете.

Поступило
27. III. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Terracini A., Su alcuni elementi lineari proiettivi, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), **2**, 401—428, 1933.

[2] Finikoff S., C. R., **199**, 177, 1934.

[3] Finikoff S., Sur les congruences stratifiables, Rend. Palermo, **53**, 314, 1929.

[4] Finikoff S., Transformations *T* des congruences de droites, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), **2**, 59—83, 1933.

S. FINIKOFF. CONGRUENCES ASSOCIÉES DANS UNE DÉFORMATION SIMULTANÉE

RÉSUMÉ

Dans le mémoire présent j'examine la déformation simultanée de deux congruences. Selon la définition de M. Cartan deux figures [**M**] et [**M**′] sont dites applicables par une déformation du n^{me} ordre, si entre leurs éléments générateurs **M** et **M**′ une correspondance biunivoque est établie et qu'à chaque couple des éléments homologues [**M**, **M**′] est associée une homographie Π qui fait coïncider les éléments **M**, **M**′ et leurs infiniment voisins jusqu'aux infiniment petites de $n+1$ ordre près.

Par rapport à un couple de congruences la déformation même du 1^er^ ordre n'est pas banale: un couple arbitraire $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ est indéformable, mais quelle que soit une congruence donnée $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ on peut lui associer avec trois fonctions arbitraires de deux arguments une autre $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$ telle que le couple obtenu soit déformable. Nous appellerons une telle congruence congruence associée dans une déformation simultanée.

En imposant une condition supplémentaire j'examine des congruences associées qui sont en même temps transformées T de la congruence primitive.

Deux congruences sont en relation de la transformation T, si les droites qui joignent les foyers homologues de deux rayons correspondants, touchent en ces points les nappes focales. Un couple arbitraire de congruences dans la relation de la transformation T est applicable sur le couple transformé du premier par une corrélation. Cette propriété ne caractérise pas la transformation T: quelle que soit la congruence donnée, on peut lui rattacher avec trois fonctions arbitraires de deux arguments une autre telle que le couple obtenu soit applicable sur un couple transformé par une corrélation. Ce cas banal exclus, la congruence dont l'associée en est une transformée T est une congruence particulière qui dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments. Le couple applicable appartient à la même classe.

En choisissant convenablement cette fonction arbitraire on obtient des couples stratifiables des congruences associées ou des couples qui entrent dans une configuration de Bianchi (du théorème de permutabilité des transformations asymptotiques) avec seize fonctions arbitraires d'un argument.

On peut noter des cas spéciaux: 1°. Deux congruences réciproques par rapport au système-nul d'un complexe linéaire sont déformables; le couple applicable (de la même espèce) dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments. 2°. Un couple de congruences W avec focales réglées communes est déformable; le couple

applicable (de la même espèce) dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. 3°. Un couple stratifiable conjugué est applicable sur n'importe quel couple conjugué ou sur un couple obtenu par une déformation projective d'une congruence du couple, si les rayons de la seconde congruence sont portés par les plans focaux homologues de la première. 4°. Chaque couple de congruences opposées d'une suite de Laplace périodique à période 4 est déformable; le couple déformable est de la même espèce (à moins qu'il ne contienne deux congruences réciproques par rapport à un complexe linéaire).

Le couple de congruences est déformable du 2^d ordre pour la première congruence et du 1^{er} pour la seconde, s'il contient une congruence *W* à focales réglées dont le rayon homologue de la seconde congruence intercepte les mêmes génératrices rectilignes. S'il touche les nappes focales aux points considérés, toutes les deux congruences s'appliquent sur celles du second couple par une déformation de 2^d ordre.

La déformation projective différentielle de la congruence *W* à focales règlées qu'on obtient, possède une propriété remarquable, à savoir: les demiquadriques composées des rayons qui interceptent deux génératrices rectilignes homologues des nappes focales restent invariantes pendant la déformation. Réciproquement, la déformation citée est la seule qui conserve invariantes ∞^1 règlées de la congruence.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Л. В. КЕЛДЫШ

СЧЕТНЫЕ ИЗМЕРИМЫЕ B РЕШЕТА, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ИЗМЕРИМЫЕ B

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе даются оценки для типов минимальных элементарных решет, определяющих B-множества конечных классов.

§ 1. Две теоремы об измеримых B решетах, определяющих множества измеримые B

В этой работе мы будем рассматривать решета, образованные линейными множествами измеримыми B произвольного класса α, расположенными на прямых, параллельных оси OX, с рациональными ординатами. Мы пользуемся классификацией измеримых B-множеств Бэра де ла Валле-Пуссена (1). В случае, когда все элементы рассматриваемого решета являются элементами классов $\alpha' < \alpha$, мы будем говорить, что наше решето есть линейное решето (α), где α наименьшее конечное или трансфинитное число, большее всех чисел α', и будем его обозначать C_α. При этом элементарное решето C обозначается C_1.

Пусть $\mathcal{E}$ элемент* класса α, расположенный на одной из сторон прямоугольника $\triangle$. Мы будем обозначать $\triangle^\alpha$ множество всех точек прямоугольника $\triangle$, ортогональные проекции которых на рассматриваемую сторону принадлежат $\mathcal{E}$, и будем называть это множество гребенчатым множеством (α) или просто «гребенка α».

Таким же образом, как мы это делали для случая элементарного решета, образованного из обычных прямоугольников, мы можем рассматривать решето, образованное гребенками (α), стороны которых параллельны осям координат. Эти решета образованы следующим образом: в прямоугольнике со сторонами, равными единице, помещена система гребенок $\triangle_n^{\alpha(1)}$ первого ранга;

---

* Элемент класса α — él α — множество, которое является пересечением счетного числа множеств классов $< \alpha$

внутри каждой из этих гребенок—система гребенок $\triangle_n^{\alpha(2)}$ второго ранга и т. д.

Пусть $S_k^{(\alpha)}$ совокупность всех гребенок ранга k. Множеством E, определенным с помощью этого решета, по определению называется проекция в пространство J_x* множества $\theta^{(\alpha)}$, которое является общей частью всех множеств $S_k^{(\alpha)}$

$$\theta^{(\alpha)} = S_1^{(\alpha)} \cdot S_2^{(\alpha)} \ldots S_k^{(\alpha)} \ldots$$

Пусть дано решето, образованное из гребенок $\alpha' < \alpha$; мы будем его называть **гребенчатым решетом** (α), где α—наименьшее, конечное или трансфинитное число большее всех α', и будем его обозначать Γ_α. Очевидно, что всякому гребенчатому (α)-решету соответствует линейное (α)-решето, которое получается, если отобрать верхние стороны всех гребенок. Обратное предложение также имеет место.

Повторяя почти дословно доказательство, данное в нашей работе ([2]) для простых линейных решет, можно доказать аналогичную теорему для решет линейных (α). Поэтому мы будем в дальнейшем всегда рассматривать одновременно два решета: решето C_α линейное (α) и соответствующее ему гребенчатое (α)-решето.

Естественно ввести понятие ранга элемента линейного решета (α). Элементами ранга k называются те его элементы, которые соответствуют элементам ранга k соответственного гребенчатого (α)-решета. Элемент $E_i^{(k+1)}$ ранга $k+1$ подчинен элементу $E_j^{(k)}$ ранга k, если соответствующая гребенка $\triangle_i^{\alpha(k+1)}$ содержится в гребенке $\triangle_j^{\alpha(k)}$.

Повторяя слово в слово доказательство Н. Н. Лузина для случая обычных прямоугольных решет, можно показать, что всякое гребенчатое (α)-решето может быть упорядочено**. Линейное (α)-решето, соответствующее гребенчатому (α) упорядоченному решету, называется линейным упорядоченным решетом.

Рассмотрим **измеримое** B-множество E, определенное с помощью линейного (α)-решета C_α. Известно, что в этом случае решето ограничено и, следовательно, дополнение является суммой **счетного** числа действительных конституант.

Назовем действительным индексом линейного (α)-решета индекс первой конституанты $\mathcal{E}_\beta$, начиная с которой все конституанты равны нулю:

$$\mathcal{E}_\gamma = 0, \quad \gamma \geq \beta; \quad \operatorname{Ind} C_\alpha = \beta.$$

* J_x—множество всех иррациональных точек оси OX (пространство Бэра).

** Решето называется упорядоченным, если множество проекций на ось OY гребенок 1-го ранга, и вообще гребенок ранга $k+1$, подчиненных одной и той же гребенке ранга k, образует простую возрастающую последовательность отрезков.

Назовем действительным индексом множества измеримого B $\operatorname{Ind}E$ наименьшее из чисел $\operatorname{Ind}C$, если C пробегает всевозможные элементарные * решета, определяющие рассматриваемое множество E.

Элементарное решето C, которое определяет измеримое B-множество E и для которого $\operatorname{Ind}C$ совпадает с $\operatorname{Ind}E$, называется минимальным решетом **.

Мы будем далее рассматривать (α)-решета, определяющие множества измеримые B.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое измеримое B-множество E, определенное с помощью линейного ($\alpha+2$) решета $C_{\alpha+2}$ с индексом β, может быть определено с помощью линейного (α)-решета C_α с индексом не большим, чем $\omega\beta$ в случае, когда β число второго рода, и с индексом не большим $\omega(\beta-1)+1$, когда β число первого рода.*

Заметим сначала, что, не нарушая общности доказательства, можно предположить, что на всякой прямой $y=r$ лежит не более одного элемента решета. Это следует из того, что всякое линейное (α)-решето может быть упорядочено без изменения действительных конституант.

Пусть теперь $C_{\alpha+2}$ линейное ($\alpha+2$)-решето, определяющее множество E измеримое B, и пусть

$$\operatorname{Ind} C_{\alpha+2}=\beta.$$

Элементами решета $C_{\alpha+2}$ являются множества él($\alpha+1$). Пусть $E_n^{(k)}$ элемент решета $C_{\alpha+2}$ ранга k. Множество $E_n^{(k)}$ есть общая часть счетного числа множеств вида $\operatorname{Inf}\alpha$ ***

$$E_n^{(k)}=\prod_{l=1}^{\infty}\mathcal{E}_{n_k}^{(l)};\quad \mathcal{E}_{n_k}^{(l)}=\operatorname{Inf}\alpha;\quad \mathcal{E}_{n_k}^{(l+1)}\subset\mathcal{E}_{n_k}^{(l)}$$

(где k обозначает ранг элемента $E_n^{(k)}$).

Каждый элемент $E_n^{(1)}$ решета $C_{\alpha+2}$ первого ранга мы заменим множеством $\mathcal{E}_{n_1}^{(1)}$ (помещая это множество на прямой, где лежал элемент $E_n^{(1)}$). Заменим каждый элемент второго ранга $E_n^{(2)}$ множеством $e_n^{(2)}$, которое является общей частью множеств $\mathcal{E}_{i_1}^{(n_2+1)}$ и $\mathcal{E}_{n_2}^{(2)}$, где множество $E_n^{(2)}$ подчинено множеству $E_i^{(1)}$. Легко видеть, что множество, предельное для всех множеств $e_{n^{(i)}}^{(2)}$, где число $n^{(i)}$ пробегает ин-

* Элементарное решето есть линейное упорядоченное решето (1).

** Определения совершенно аналогичны определениям Н. Н. Лузина для случая индексов кажущихся (apparents) (3).

*** $\operatorname{Inf}\alpha$ — достижимое снизу множество класса α, т. е. множество, которое является суммой множеств классов $<\alpha$.

дексы всех множеств $E_n^{(2)}$, подчиненных множеству $E_i^{(1)}$, содержится в $E_i^{(1)}$,

$$\overline{\lim_{n^{(i)}\to\infty}}\, e_{n^{i}}^{(2)} \subset E_i^{(1)},$$

так как каждая точка множества $\overline{\lim\limits_{n^{(i)}\to\infty}}\, e_{n^{(i)}}^{(2)}$ содержится в бесчисленном числе множеств $\mathcal{E}_{i_1}^{(l)}$, а следовательно, и в $E_i^{(1)}$. Заменим вообще всякий элемент $E_n^{(k)}$ ранга k множеством $e_n^{(k)}$, которое является общей частью множеств $\mathcal{E}_{n_1}^{(n_2+k)}, \mathcal{E}_{n_2}^{(n_3+k)}, \ldots, \mathcal{E}_{i_{k-1}}^{(n_k+k)}$ и $\mathcal{E}_{n_k}^{(k)}$, где элемент $E_n^{(k)}$ подчинен элементам $E_{n_1}^{(1)}, E_{n_2}^{(2)}, \ldots, E_{i_{k-1}}^{(k-1)}$. Легко видеть, как и для случая $k=2$, что верхнее предельное множество для множеств $e_{n^{(i)}}^{(k)}$, где число $n^{(i)}$ пробегает индексы всех множеств $E_n^{(k)}$, подчиненных множеству $E_i^{(k-1)}$, содержится в $E_i^{(k-1)}$:

$$\overline{\lim_{n^{(i)}\to\infty}}\, e_{n^{(i)}}^{(k)} \subset E_i^{(k-1)}.$$

Каждое множество $e_n^{(k)}$ не более, чем $\operatorname{Inf} \alpha$, так как оно является пересечением конечного числа множеств этой природы. Следовательно, решето, образованное из множеств $e_n^{(k)}$, есть линейное (α)-решето * C_α. Легко видеть, что множество $e_i^{(k)}$ заключено в множестве $e_j^{(k-1)}$, если элемент $E_i^{(k)}$ подчинен элементу $E_j^{(k-1)}$. Если решето $C_{\alpha+2}$ упорядочено, то упорядочено и решето C_α, если рассматривать каждое множество $e_n^{(k)}$, как его элемент. Множество $e_i^{(k)}$ есть элемент решета C_α ранга k, подчиненный элементу $e_j^{(k-1)}$, если элемент $E_i^{(k)}$ подчинен элементу $E_j^{(k-1)}$.

Покажем, что решето C_α определяет то же самое множество E. Действительно, пусть x_0 точка множества E. Тогда существует убывающая последовательность элементов решета $C_{\alpha+2}$

$$E_{n_1}^{(1)},\quad E_{n_2}^{(2)},\ \ldots,\ E_{n_k}^{(k)},\ \ldots$$

такая, что прямая $x = x_0$ содержит точку каждого из этих элементов. Этой последовательности соответствует падающая цепочка элементов решета C_α

$$e_{n_1}^{(1)},\quad e_{n_2}^{(2)},\ \ldots,\ e_{n_k}^{(k)},\ldots$$

Элемент $e_{n_k}^{(k)}$ содержит элемент $E_{n_k}^{(k)}$, следовательно, прямая $x = x_0$ пересекает каждый элемент $e_{n_k}^{(k)}$ и, значит, точка x_0 входит в множество $\mathcal{E}$, определенное решетом C_α. Следовательно, множество E содержится в множестве $\mathcal{E}$.

Обратно, покажем, что множество $\mathcal{E}$ содержится в множестве E.

* Так как каждое $e_n^{(k)}$ Разбивается на сумму элементов классов $< \alpha$.

Действительно, пусть x_0 точка множества $\mathcal{E}$. Тогда существует падающая последовательность точек решета C_α

$$y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots,$$

причем каждая последующая из этих точек лежит на прямой $x = x_0$ под предыдущей; y — предельная точка этой последовательности.

Пусть $e_{n_1}^{(1)}$ — **самый нижний** элемент первого ранга решета C_α, имеющий точку на прямой $x = x_0$ над точкой y. Такой элемент найдется в силу упорядоченности решета C_α.

Таким же образом мы найдем самый нижний элемент второго ранга решета C_α, имеющий на прямой $x = x_0$ точку над точкой y; он должен быть подчинен элементу $e_{n_1}^{(1)}$ и т. д. — мы получим последовательность элементов решета C_α

$$e_{n_1}^{(1)}, \quad e_{n_2}^{(2)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)}, \ldots$$

Каждый последующий элемент этой последовательности подчинен предыдущему, и каждый элемент $e_{n_k}^{(k)}$ имеет точку на прямой $x = x_0$. По построению множество $e_{n_k}^{(k)}$ является общей частью множеств $\mathcal{E}_{n_1}^{(n_2+k)}, \ldots, \mathcal{E}_{n_{k-1}}^{(n_k+k)}$ и $\mathcal{E}_{n_k}^{(k)}$, следовательно, точка x_0 содержится во всех множествах $\mathcal{E}_{n_1}^{(1)}, \mathcal{E}_{n_1}^{(2)}, \ldots, \mathcal{E}_{n_1}^{(k)}, \ldots$ и в их общей части $E_{n_1}^{(1)}$.

Рассуждая таким же образом, мы покажем, что точка x_0 содержится в каждом из множеств $E_{n_k}^{(k)}$. Следовательно, прямая $x = x_0$ пересекает каждый из элементов падающей последовательности

$$E_{n_1}^{(1)}, \quad E_{n_2}^{(2)}, \ldots, E_{n_k}^{(k)}, \ldots$$

и точка x_0 содержится в E. Значит, *множество $\mathcal{E}$, определенное решетом C_α, совпадает с множеством E.*

Мы будем теперь определять действительный индекс решета C_α. Для этого достаточно определить действительный индекс решета C_α в произвольной точке x_0 дополнения к множеству E. Пусть x_0 такая точка и пусть P_{x_0} множество точек решета $C_{\alpha+2}$, лежащих на прямой $x = x_0$, а Q_{x_0} множество точек решета C_α, лежащих на той же прямой. Оба эти множества вполне упорядочены. Очевидно, что множество P_{x_0} содержится в множестве Q_{x_0}, так как каждый элемент решета $C_{\alpha+2}$ содержится в каком-нибудь элементе решета C_α.

Мы покажем, что часть множества Q_{x_0}, расположенная между двумя последовательными точками множества * P_{x_0}, имеет тип не больший, чем ω.

* В силу упорядоченности решета $C_{\alpha+2}$ новые точки решета C_α на прямой $x = x_0$ могут появиться только между двумя соседними точками множества Px_0 или над верхней его точкой, если такая существует.

Действительно, пусть y_0 и y_0' две последовательные точки множества P_{x_0}, $y_0 < y_0'$. Эти две точки принадлежат двум элементам $E_{n_j}^{(j)}$ и $E_{n_i}^{(i)}$ решета $C_{\alpha+2}$. Возможны два случая.

Первый случай. Множество $E_{n_j}^{(j)}$ подчинено множеству $E_{n_i}^{(i)}$. В этом случае множество $E_{n_j}^{(j)}$ есть множество $E_{n_{i+1}}^{(i+1)}$ ранга $i+1$. Точки множества Q_{x_0}, расположенные между y_0 и y_0', принадлежат элементам решета C_α, подчиненным элементу $e_{n_i}^{(i)}$, так как решето C_α упорядочено. Между точками y_0 и y_0' может существовать возрастающая последовательность точек

$$y_1^{(i+1)},\ y_2^{(i+1)},\ \ldots,\ y_n^{(i+1)},\ \ldots,$$

принадлежащих элементам ранга $i+1$ решета C_α, подчиненным $e_{n_i}^{(i)}$. Между двумя последовательными элементами этой последовательности $y_s^{(i+1)}$ и $y_{s+1}^{(i+1)}$, принадлежащими элементам $e_{n_s}^{(i+1)}$ и $e_{n_{s+1}}^{(i+1)}$, могут лежать точки элементов решета C_α ранга $i+2$, подчиненных $e_{n_{s+1}}^{(i+1)}$. Но этих точек может быть не более, чем конечное число, так как точка x_0 не содержится в $E_{n_{s+1}}^{(i+1)}$, следовательно, не содержится и в верхнем предельном множестве для множеств $e_n^{(i+2)}$, подчиненных $e_{n_{s+1}}^{(i+1)}$.

Можно доказать таким же образом, что каково бы ни было число $l > i$, множество точек прямой $x = x_0$, принадлежащих элементам ранга $l+1$ решета C_α и лежащих между двумя последовательными элементами ранга l, $e_n^{(l)}$ и $e_{n'}^{(l)}$, содержит не более конечного числа точек. И вследствие того что множество Q_{x_0} должно быть вполне упорядочено, часть этого множества, расположенная между двумя последовательными точками последовательности $y_1^{(i+1)}$, $y_2^{(i+1)}$, ..., $y^{(i+1)}$, ..., есть конечное множество. Следовательно, часть множества Q_{x_0}, расположенная между двумя последовательными точками y_0 и y_0' множества P_{x_0}, есть множество типа не выше ω.

Таким же образом можно показать, что если существует верхняя точка множества P_{x_0}, то множество точек, принадлежащих Q_{x_0} и расположенных выше P_{x_0}, есть множество типа не выше ω, так же, как и часть Q_{x_0}, расположенная под нижней точкой множества P_{x_0}.

Второй случай. Нижний элемент $E_{n_j}^{(j)}$ не подчинен верхнему элементу $E_{n_i}^{(i)}$. В этом случае элемент $E_{n_i}^{(i)}$ имеет ранг *не* меньший, чем $E_{n_j}^{(j)}$, $i \geqslant j$.

Следовательно, оба элемента $E_{n_i}^{(i)}$ и $E_{n_j}^{(j)}$ подчинены некоторому элементу ранга $j-1$ $E_{n_{j-1}}^{(j-1)}$ (если $j > 1$). Заменяя решето $C_{\alpha+2}$ ре-

шетом C_α, мы получим на прямой $x = x_0$ между точками y_0 и y_0' не более чем по конечному числу точек элементов $e_n^{(s)}$ ранга s, $j \leqslant s \leqslant i$, подчиненных элементу $e_n^{(s-1)}$, которому подчинен элемент $e_{n_i}^{(i)}$, и возрастающую последовательность точек, принадлежащих элементам $e_n^{(i+1)}$ ранга $i+1$, подчиненных элементу $e_{n_i}^{(i)}$. Повторяя приведенное выше рассуждение, легко показать, что в этом случае часть множества Q_{x_0}, расположенная между точками y_0 и y_0', также имеет тип не выше, чем ω.

Следовательно, во всяком случае часть множества Q_{x_0}, расположенная между двумя соседними точками множества P_{x_0}, под нижней или над верхней точкой множества P_{x_0}, если такая существует, есть множество типа не выше ω.

Таким же образом можно показать, что если на прямой $x = x_0$ нет точек решета $C_{\alpha+2}$, то множество лежащих на ней точек решета C_α имеет тип не выше ω.

Пусть теперь

$$\operatorname{Ind}_{x_0} C_{\alpha+2} = \beta', \quad \beta' < \beta.$$

Из изложенного выше следует *, что

$$\operatorname{Ind}_{x_0} C_\alpha \leqslant \omega\beta'$$

Перейдем теперь к определению действительного индекса решета C_α, если действительный индекс решета $C_{\alpha+2}$ равен β. Следует различать два случая:

П е р в ы й с л у ч а й: β число второго рода. Очевидно, что тогда

$$\operatorname{Ind} C_\alpha \leqslant \omega\beta,$$

так как, какова бы ни была точка x_0 дополнения к E, имеет место неравенство

$$\operatorname{Ind}_{x_0} C_\alpha \leqslant \omega\beta' < \omega\beta.$$

В т о р о й с л у ч а й: β число первого рода, $\beta > \omega$. В этом случае, какова бы ни была точка x_0 дополнения к E, имеем

$$\operatorname{Ind}_{x_0} C_\alpha \leqslant \omega(\beta - 1)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Ind} C_\alpha \leqslant \omega(\beta - 1) + 1.$$

Ч. Т. Д.

Пусть E линейный элемент класса α. Известно, что E является общей частью монотонной последовательности достижимых снизу

* Если β' конечное число, то $\operatorname{Ind}_{x_0} C_\alpha \leqslant \omega(\beta' + 1)$. Для дальнейшего это не имеет значения, так как мы рассматриваем решета с индексом не меньшим ω.

множеств $E_{1\sigma}, E_{2\sigma}, \ldots, E_{k\sigma}, \ldots$ классов меньших α. Каждое множество $E_{k\sigma}$ является суммой элементов классов меньших α попарно без общих точек:

$$E_{k\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(k)}.$$

Можно построить линейное (α)-решето, определяющее множество E, следующим образом.

Возьмем убывающую последовательность рациональных чисел, стремящихся к нулю

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_k > \ldots \to 0.$$

Множество $E_{1\sigma}$ поместим на прямой $y=r_1$, множество $E_{2\sigma}$ на прямой $y=r_2$ и вообще множество $E_{k\sigma}$ поместим на прямой $y=r_k$. Легко видеть, что если точка x_0 принадлежит к дополнению множества E, то прямая $x=x_0$ пересекает не более конечного числа множеств $E_{k\sigma}$. Следовательно, действительный индекс построенного решета в точке x_0 есть какое-то конечное число или нуль и индекс самого решета равен ω. Если α число второго рода, то построенное решето C_α является линейным (α)-решетом. Если α число первого рода, то множества $E_n^{(k)}$ являются элементами классов меньших, чем $\alpha-1$, и построенное решето $C_{\alpha-1}$ есть решето линейное ($\alpha-1$).

ТЕОРЕМА 2. *Всякий элемент E класса $\alpha+2$ может быть определен с помощью линейного (α)-решета C_α с действительным индексом равным $\omega \cdot 2$.*

Мы видели уже, что множество E может быть определено с помощью линейного ($\alpha+1$)-решета, элементы которого $E_n^{(k)}$ являются элементами класса α и тип которого равен ω. Можно предположить, что это решето упорядочено (не изменяя типа). Вернемся теперь к конструкции решета C_α, определяющего множество E.

Каждый элемент $E_n^{(k)}$ решета $C_{\alpha+1}$ есть общая часть счетного числа множеств классов меньших α

$$E_n^{(k)}=\prod_{l=1}^{\infty} \mathscr{E}_{nk}^{(l)};\ \text{cl}\ \mathscr{E}_{n_k}^{(l)}<\alpha.$$

Известно, что два произвольных элемента класса α без общих точек могут быть отделены с помощью множеств низших классов или базы B_α *.

* См. ([1]), стр. 67. Множество предельного класса α принадлежит к базе B_α, если оно одновременно является и суммой и пересечением множеств низших классов.

Пусть $S_n^{(1)}$ множество класса $<\alpha$, отделяющее $E_n^{(1)}$ от суммы $E_1^{(1)}+E_2^{(1)}+\ldots+E_{n-1}^{(1)}$. Заменим элемент $E_n^{(1)}$ первого ранга решета $C_{\alpha+1}$ множеством $e_n^{(1)}$, которое является общей частью множеств $S_n^{(1)}$ и $\mathcal{E}_{n_1}^{(1)}$. Очевидно, что $E_n^{(1)}\subset e_n^{(1)}$. Легко видеть, что верхнее предельное множество для множеств $e_n^{(1)}$ не содержит ни одной точки множества $E_{1\sigma}=E_1^{(1)}+E_2^{(1)}+\ldots+E_n^{(1)}+\ldots$, так как множество $e_i^{(1)}$ не имеет ни одной общей точки с множеством E_1+ $+E_2+\ldots+E_n$, если $i>n$. Вообще пусть $S_n^{(k)}$ множество класса меньшего α или базы B_α, отделяющее множество $E_n^{(k)}$ от суммы $E_1^{(k)}+E_2^{(k)}+\ldots+E_{n-1}^{(k)}$; заменим элемент $E_n^{(k)}$ множеством $e_n^{(k)}$, которое является общей частью множеств

$$\mathcal{E}_{n_1}^{(n_2+k)},\ \mathcal{E}_{n_2}^{(n_3+k)},\ \ldots,\ \mathcal{E}_{n_{k-1}}^{(n_k+k)},\ \mathcal{E}_{n_k}^{(k)}\quad\text{и}\quad S_n^{(k)},$$

причем элемент $E_n^{(k)}$ подчинен всем множествам $E_{n_1}^{(1)}, E_{n_2}^{(2)},\ldots,E_{n_{k-1}}^{(k-1)}$.

Верхнее предельное множество для множеств $e_{n^{(i)}}^{(k)}$ содержится в $E_i^{(k-1)}$, если число $n^{(i)}$ пробегает индексы всех элементов $E_{n^{(i)}}^{(k)}$, подчиненных элементу $E_i^{(k-1)}$

$$\overline{\lim_{n^{(i)}\to\infty}}\ e_{n^{(i)}}^{(k)}\subset E_i^{(k-1)},$$

так как точка x_0, содержащаяся в множестве $\overline{\lim\limits_{n^{(i)}\to\infty}}\ e_{n^{(i)}}^{(k)}$ содержится в бесконечном числе множеств $\mathcal{E}_{i_{k-1}}^{(l)}$. С другой стороны, так же, как и в случае $k=1$, множество $\overline{\lim\limits_{n^{(i)}\to\infty}}\ e_{n^{(i)}}^{(k)}$ не содержит точек множества $E_{k\sigma}$.

Можно доказать, как и в случае теоремы 1, что построенное решето, состоящее из множеств $e_n^{(k)}$, определяет то же самое множество E, как и решето $C_{\alpha+1}$.

Каждое множество $e_n^{(k)}$ есть общая часть конечного числа множеств $\mathcal{E}_{n_s}^{(l)}$, $s\leqslant k$ и множества $S_n^{(k)}$. Все эти множества принадлежат к классам меньшим α или к базе B_α. Следовательно, множество $e_n^{(k)}$ само принадлежит к классу меньшему α или к базе B_α. Таким образом множество $e_n^{(k)}$ есть сумма счетного числа элементов классов меньших α, и, значит, построенное решето есть линейное (α)-решето C_α.

Определим теперь действительный индекс решета C_α. Пусть x_0 произвольная точка множества, дополнительного к E. Прямая $x=x_0$ пересекает решето $C_{\alpha+1}$ не более, чем в конечном числе точек. Пусть она пересекает решето $C_{\alpha+1}$ в точках $y_1, y_2,\ldots,y_k$, принадлежащих соответственно элементам $E_{n_1}^{(1)}, E_{n_2}^{(2)},\ldots,E_{n_k}^{(k)}$.

Множество Q_{x_0} точек решета C_α, расположенных на прямой $x = x_0$, вполне упорядочено в положительном направлении оси OY и содержит точки $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Предположим, что это множество обладает предельной точкой. Пусть y предельная точка множества Q_{x_0}. Существует, следовательно, возрастающая последовательность точек множества Q_{x_0}, стремящаяся к точке y. Можно выделить из этой последовательности новую последовательность точек, принадлежащих элементам одного и того же ранга. Пусть l наименьший возможный ранг, удовлетворяющий этому условию. Можно выбрать последовательность точек множества Q_{x_0}, сходящуюся к y

$$y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \ldots, y_n^{(l)}, \ldots \to y$$

таким образом, что все точки этой последовательности принадлежат элементам решета C_α ранга l, подчиненным одному и тому же элементу $e_i^{(l-1)}$ ранга $l-1$. Следовательно, точка x_0 содержится в верхнем предельном множестве для множеств $e_{n^{(i)}}^{(l)}$, подчиненных $e_i^{(l-1)}$, и, значит, точка x_0 содержится в множестве $E_i^{(l-1)}$ и не содержится в множестве $E_{l\sigma}$. Значит, прямая $x = x_0$ пересекает элемент $E_i^{(l-1)}$ решета $C_{\alpha+1}$ и не пересекает никакого элемента этого решета ранга l. Но в этом случае элемент $E_i^{(l-1)}$ совпадает с элементом $E_{n_k}^{(k)}$ (k—число точек решета $C_{\alpha+1}$ на прямой $x = x_0$) и, следовательно, множество Q_{x_0} не может иметь больше одной предельной точки, расположенной под точкой y_k или совпадающей с этой точкой. Таким образом действительный индекс решета C_α в точке x_0 не больше, чем $\omega + k$; значит, действительный индекс решета C_α не больше $\omega \cdot 2$. Легко видеть, что этот индекс не может быть меньше $\omega \cdot 2$, так как множество $\overline{\lim\limits_{n^{(i)}\to\infty}} e_{n^{(i)}}^{(k)}$ не может быть пусто, если $E_i^{(k-1)} \cdot E_{k\sigma} = \operatorname{Inf} \alpha$ *. И следовательно,

$$\operatorname{Ind} C_\alpha = \omega \cdot 2.$$

Ч. Т. Д.

Рассмотрим теперь решета, определяющие измеримые B-множества $\operatorname{Inf} \alpha$ или $\operatorname{Inac} \alpha$ **. Пусть E множество $\operatorname{Inf} \alpha$

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

Всякое множество E_n есть элемент класса меньшего α. Чтобы построить решето, определяющее множество E, достаточно, как заметил Н. Н. Лузин, разделить квадрат на счетное число полос, параллельных оси OX и стремящихся к его верхней стороне,

* Критерий неповышения класса. См. ([1]), стр. 77.

** $\operatorname{Inac}\alpha$ — недостижимое множество класса α, т. е. множество, которое не является ни суммой, ни пересечением счетного числа множеств классов $< \alpha$.

и вписать в каждую из этих полос соответственно решето C^n для элемента E_n. Совокупность всех решет $C^1, C^2, \ldots, C^n, \ldots$ образует новое решето C, которое определяет множество E. Действительный индекс решета C в точке x_0 равен сумме действительных индексов в той же точке всех решет C^n

$$\mathrm{Ind}_{x_0} C = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ind}_{x_0} C^n$$

Пусть E множество Inf $(\alpha + 1)$. Каждое множество E_n есть élα. Следовательно, E_n может быть определено с помощью линейного (α)-решета с действительным индексом ω. Если α число первого рода, решето C_α можно заменить решетом $C_{\alpha-1}$ линейным (α—1) и имеющим тот же индекс ω. Действительный индекс решета C_α^n (или $C_{\alpha-1}^n$) в точке x_0 дополнения к E является конечным числом k_n. Следовательно, действительный индекс решета C_α в какой-нибудь точке x_0 множества CE не больше чем ω, а действительный индекс решета C_α (или $C_{\alpha-1}$) не более чем $\omega + 1$. Легко видеть, что этот индекс в точности равен $\omega + 1$, так как верхнее предельное множество для множеств $E_n^{(k)}$ (элементов первого ранга решета C_α) должно содержать точки*. Следовательно, для минимального линейного (α)-решета C_α (или $C_{\alpha-1}$), определяющего множество Inf $(\alpha+1)$, имеем

$$\mathrm{Ind}\, C_{\alpha-1} = \omega + 1,$$

если α число первого рода, и

$$\mathrm{Ind}\, C_\alpha = \omega + 1,$$

если α число второго рода.

Пусть теперь E множество Inac α. Известно, что множество E есть сумма элементов класса не выше α [см. ([1]), стр. 77]

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots; \quad E_n \leqslant \text{él}\, \alpha$$

и что каждый элемент E_n может быть заключен в множество S_n класса $< \alpha$ или базы B_α таким образом, что $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ [см. ([1]), стр. 74].

Построим теперь линейное (α)-решето C_α, определяющее множество E. Построим сначала решето (α), определяющее множество E, таким же образом, как мы это делали для случая Inf$(\alpha + 1)$. Далее заменим каждый элемент $e_{n,k}$ решета $\widetilde{C}_\alpha^n$, определяющего E_n, общей частью множеств $e_{n,k}$ и S_n. Множество S_n есть сумма элементов классов меньших α, следовательно, такова же природа множества $e_{n,k} \cdot S_n$; поэтому решето, элементами которого являются множества $e_{n,k} \cdot S_n$ ($n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots$), остается еще линейным (α)-решетом C_α, определяющим множество

* Критерий неповышения класса. См. ([1]), стр. 77.

E. Какова бы ни была точка x_0 дополнения к E, мы имеем $\text{Ind}_{x_0} C_\alpha^n = k_n$, где k_n конечное число или нуль. Прямая $x = x_0$ пересекает элементы конечного числа решет $C_\alpha^{(n)}$, так как верхнее предельное множество для множеств S_n пусто. Следовательно, действительный индекс решета C_α в точке x_0 есть конечное число и, значит, действительный индекс решета C_α равен ω.

Пусть теперь α число первого рода; рассмотрим минимальное решето $C_{\alpha-1}$, определяющее множество E. Решето $C_{\alpha-1}$ строится таким же образом, как в случае $\text{Inf}(\alpha+1)$; легко показать, что действительный индекс этого решета не больше, чем $\omega + 1$. Следовательно, если E является $\text{Inac}\alpha$, мы имеем для индексов минимальных решет

$$\text{Ind} C_\alpha = \omega$$

и

$$\text{Ind} C_{\alpha-1} = \omega + 1,$$

если α число первого рода *.

§ 2. Действительные индексы измеримых B-множеств конечных классов **

Приложим теперь доказанные выше теоремы и доказанное нами ранее 4-е неравенство Серпинского ([2]) к определению действительных индексов измеримых B-множеств конечных классов.

Напомним неравенство Серпинского. Пусть σ_α сумма конституант аналитического дополнения с индексами меньшими α

$$\sigma_\alpha = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_\beta + \ldots \mid \alpha$$

Неравенство Серпинского, оценивающее класс σ_α, может быть записано следующим образом ***:

$$\textbf{a}\ \sigma_{\omega^\alpha} \leqslant \text{Inf}\ 2\alpha;\ \textbf{b}\ \sigma_{\omega^\alpha + \beta} \leqslant \text{él}\,(2\alpha + 1),\ \beta < \omega^\alpha$$

$$\textbf{c}\ \sigma_{\omega^\alpha n + \beta} \leqslant \text{Inac}\,(2\alpha + 1);\ n > 1,\ \beta < \omega^\alpha.$$

Пусть теперь K_{2n} конечный класс измеримых B-множеств с четным номером и K_{2n+1} конечный класс измеримых B-множеств

---

* Легко видеть, что действительный индекс решета $C_{\alpha-1}$ в точности равен $\omega + 1$, так как в противном случае каждый элемент E_n был бы заключен в множество S_n, которое является $\text{Inf}\,(\alpha-1)$, таким образом, что $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$. Но в этом случае множество E было бы не более, чем $\text{él}\,\alpha$, что противно предположению $E = \text{Inac}\,\alpha$.

** Н. Н. Лузин определил ([3]) «кажущиеся» (apparants) индексы множеств измеримых B.

*** Формулы $E \leqslant \text{Inf}\,\alpha$, $E \leqslant \text{él}\,\alpha$ обозначают, что класс E либо $< \alpha$, либо E соответственно $\text{Inf}\,\alpha$ или $\text{él}\,\alpha$; $E \leqslant \text{Inac}\,\alpha$ обозначают, что класс множества E не больше α.

с нечетным номером; вот формулы, определяющие их действительные индексы:

$$n > 0 \ K_{2n} \begin{cases} \text{él} & \text{Ind} = \omega^n \\ \text{Inf} & \text{Ind} = \omega^n + 1 \\ \text{Inac} & \text{Ind} = \omega^n + 1 \end{cases}$$

$$n > 0 \ K_{2n+1} \begin{cases} \text{él} & \text{Ind} = \omega^n \cdot 2 \\ \text{Inf} & \text{Ind} = \omega^n + 1 \\ \text{Inac} & \omega^n \cdot 2 \leqslant \text{Ind} \leqslant \omega^{n+1}. \end{cases}$$

Действительный индекс всякого множества класса 0 равен нулю. Действительный индекс множества Inf 1 также равен нулю, а множества él 1 (замкнутого) или Inac 1 равен ω. Чтобы доказать указанные неравенства для случая $n > 0$, достаточно построить элементарные минимальные решета для измеримых B-множеств конечных классов. Рассмотрим все возможные случаи:

1) $E = \text{él}\,2n$. Мы уже видели, что множество E может быть определено линейным $(2n-1)$ решетом с индексом, равным ω. Применяя последовательно $(n-1)$ раз теорему 1, мы видим, что множество может быть определено с помощью элементарного решета, индекс которого не больше ω^n. Именно

$$\text{Ind}\,E \leqslant \omega^n.$$

Остается показать, что действительный индекс элемента E класса $2n$ не может быть меньше, чем ω^n. Действительно, предположим противное: пусть $\text{Ind}\,E = \beta$, $\beta < \omega^n$. Тогда дополнение к E есть сумма действительных конституант номеров меньших β:

$$CE = \sigma_\beta;$$

но вследствие 4-го неравенства Серпинского из условия $\beta < \omega^n$ будем иметь $\sigma_\beta \leqslant \text{Inac}\,(2n-1)$, что невозможно, так как $\sigma_\beta = CE$ должно быть множеством Inf $2n$. Следовательно,

$$\text{Ind}\,E = \omega^n.$$

2) $E = \text{Inf}\,2n$, $E = \text{Inac}\,2n$, $E = \text{Inf}\,(2n+1)$. В этих трех случаях множество E может быть определено с помощью линейного $(2n-1)$ решета с индексом $\omega + 1$. Прилагая последовательно $n-1$ раз теорему 1, мы видим, что множество E может быть определено с помощью элементарного решета, индекс которого не больше $\omega^n + 1$. Покажем, что действительный индекс множества E не может быть меньше $\omega^n + 1$. Предположим противное: пусть $\text{Ind}\,E = \beta$, $\beta < \omega^n + 1$; тогда дополнение к E есть множество σ_β. Но вследствие 4-го неравенства Серпинского из условия $\beta \leqslant \omega^n$ следует, что

$$\sigma_\beta = CE \leqslant \text{Inf}\,2n,$$

что невозможно, так как $CE = \text{él}\,2n$ в случае $E = \text{Inf}\,2n$, $CE = \text{Inac}\,2n$ в случае $E = \text{Inac}\,2n$ и $CE = \{\text{él}\,(2n+1)\}$ в случае $E = \text{Inf}\,(2n+1)$. Следовательно,

$$\text{Ind}\,E = \omega^n + 1.$$

3) $E = \text{él}\,(2n+1)$. Вследствие теоремы 2 элемент E может быть определен с помощью линейного $(2n-1)$ решета с действительным индексом $\omega \cdot 2$. Применяя последовательно $n-1$ раз теорему 1, мы видим, что элемент E может быть определен с помощью элементарного решета с действительным индексом не большим, чем $\omega^n \cdot 2$. Предположим, что действительный индекс множества E меньше, чем $\omega^n \cdot 2$; пусть $\text{Ind}\,E = \beta$, $\beta < \omega^n \cdot 2$. Тогда дополнение к E есть множество σ_β. Но вследствие 4-го неравенства Серпинского из условия $\beta < \omega^n \cdot 2$ следует

$$CE = \sigma_\beta \leqslant \text{él}\,(2n+1),$$

что невозможно, так как $CE = \text{Inf}\,(2n+1)$, и значит

$$\text{Ind}\,E = \omega^n \cdot 2.$$

4) $E = \text{Inac}\,(2n+1)$. Множество E может быть определено с помощью линейного $(2n+1)$ решета типа ω. Применяя n раз теорему 1, мы видим, что множество E может быть определено с помощью элементарного решета типа не большего, чем ω^{n+1}. Можно показать таким же образом (как в случае 3), что действительный индекс множества E не меньше, чем $\omega^n \cdot 2$. Следовательно,

$$\omega^n \cdot 2 \leqslant \text{Ind}\,E \leqslant \omega^{n+1}.$$

Существуют множества $\text{Inac}\,(2n+1)$ с действительным индексом равным $\omega^n \cdot 2$ и также с действительным индексом равным $\omega^n + 1$. Действительно, чтобы получить множества $\text{Inac}\,(2n+1)$ с индексом $\omega^n \cdot 2$, достаточно поместить в интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ множество $\text{él}(2n+1)$ и в интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ множество $\text{Inf}\,(2n+1)$. Чтобы доказать, что существуют множества $\text{Inac}\,(2n+1)$ с действительным индексом равным ω^{n+1}, заметим, что если действительный индекс множества $\text{Inac}\,(2n+1)$ меньше, чем ω^{n+1}, то

$$\text{Ind}\,E = \omega^n k + \beta,\ k \geqslant 2,\ \beta < \omega^n.$$

Но в этом случае множество CE есть множество $\sigma_{\omega^n k+\beta}$, а мы видели, что это множество есть сумма конечного числа изолированных множеств класса $2n+1$. Но такое множество есть множество класса $2n+1$ **конечного** подкласса (см. ниже). Следовательно, все множества класса $2n+1$ и достаточно большого подкласса имеют действительный индекс ω^{n+1}.

Множество $\sigma_{\omega^\alpha n+\beta}$ есть сумма конечного числа изолированных множеств класса $2\alpha + 1$ [2]. Множество называется изолированным, если оно является суммой счетного числа элементов данного класса, каждый из которых отделим от суммы всех остальных.

Подкласс изолированного множества класса α равен ω. Покажем, что подкласс суммы конечного числа изолированных множеств класса α есть число вида $\omega \cdot m$, где m — конечное число. Предположим, что это имеет место

для суммы n изолированных множеств, и покажем, что в этом случае это верно и для суммы $n+1$ изолированных множеств. Пусть E сумма n изолированных множеств класса α, т. е. множество подкласса $\omega \cdot m$, и пусть E^* изолированное множество класса α. Рассмотрим подкласс множества $E+E^*$. Множество E^* есть сумма элементов класса α:

$$E^* = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots,$$

причем каждый элемент E_n содержится в множестве S_n класса меньшего α таким образом, что множества S_i и S_j, $i \neq j$, попарно не имеют общих точек. Рассмотрим, каково бы ни было n, множество $E \cdot S_n$. Это множество класса α и подкласса не выше $\omega \cdot m$. Множество $E \cdot S_n$ отделено с помощью S_n от суммы всех других: $\sum_{i \neq n} E \cdot S_i$. Следовательно, множество $\sum_{n=1}^{\infty} E \cdot S_n$ есть множество класса α и подкласса не больше $\omega \cdot m$ (так как изолированный элемент множества $E \cdot S_n$ является изолированным элементом множества $\sum_{n=1}^{\infty} E \cdot S_n$) Мы имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \cdot S_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_\omega + \ldots + e_\beta + \ldots \mid \omega \cdot m, \tag{1}$$

где e_β есть множество él-, изолированное от всех элементов последовательности (1), которые за ним следуют. Множество $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ есть множество не более, чем Infα. Следовательно, множество $E \cdot C \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ есть также множество класса α и подкласса не выше $\omega \cdot m$ (так как это общая часть множества E и элемента класса α).

Каждый элемент e_β суммы (1) отделен соответствующим множеством S_n от множества $E^* - E_n + E \cdot C \sum S_n$. Вследствие известной теоремы элемент e_β отделим от элемента E_n. Следовательно, каждый элемент e_β отделен от множества $E^* + E \cdot C \sum S_n$. Отсюда следует, что последовательность (1) есть последовательность $\omega \cdot m$ первых элементов, которые составляют множество $E + E^*$. Множество E_n будет иметь в этой последовательности номер не выше $\omega \cdot m + n$. Действительно, множество S_n отделяет элемент E_n от множества $E^* - E_n + E \cdot C \sum_{n=1}^{\infty} S_n$. Элемент номера β последовательности, которая определяет множество $E \cdot C \sum S_n$, есть элемент с номером не выше $\omega(m+1) + \beta$ последовательности, которая составляет множество $E + E^*$. И так как подкласс множества $E \cdot C \sum S_n$ не больше, чем $\omega \cdot m$, то

$$E + E^* = e_1 + e_2 + \ldots + e_{\omega m} + \ldots + e_{\omega m + n} + \cdots + e_{\omega(m+1)+\beta} + \ldots \mid \omega(2m+1).$$

Итак, подкласс множества $E + E^*$ не больше, чем $\omega(2m+1)$, следовательно, он равен трансфинитному числу вида $\omega \cdot m_1$. Подкласс множества класса α, которое является суммой конечного числа изолированных множеств, всегда меньше, чем ω^2. Ч.Т.Д.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
17.IV.1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lusin. N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

[2] Келдыш Л. В., Верхние оценки классов конституант аналитического дополнения, Изв. АН СССР, Серия матем., № 2, 1937.

[3] Lusin N., Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques, Ann. della R. Sc. Norm. di Pisa, 1933.

LUDMILA KELDYCH. CRIBLES DÉNOMBRABLES MESURABLES B POUR LES ENSEMBLES MESURABLES B

RÉSUMÉ

Nous considérons dans cet article des cribles formés par des ensembles linéaires mesurables B de classe α quelconque situés sur les droites $y = r$. Nous appelons un crible C_α dont les éléments sont des éléments de classes $\alpha' < \alpha$ crible rectiligne (α).

Nous considérons les définitions suivantes ([1]). Appelons indice réel du crible rectiligne (α) l'indice de la première constituante $\mathcal{E}_\beta$ à partir de laquelle toutes les constituantes sont nulles

$$\mathcal{E}_\gamma = 0, \quad \gamma \geqslant \beta, \quad \operatorname{Ind} C_\alpha = \beta.$$

Appelons indice réel de l'ensemble E mesurable B—$\operatorname{Ind} E$—le plus petit des nombres $\operatorname{Ind} C$ lorsque C parcourt tous les cribles rectilignes élémentaires (formés de portions) définissant l'ensemble considéré E. Un crible élémentaire C qui définit l'ensemble E mesurable B et pour lequel $\operatorname{Ind} C$ coïncide avec $\operatorname{Ind} E$ est dit crible minimum. Nous démontrons les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *Tout ensemble E mesurable B criblé au moyen d'un crible $C_{\alpha+2}$ rectiligne $(\alpha+2)$ d'indice réel β peut être criblé au moyen d'un crible C_α rectiligne (α) d'indice $\omega \cdot \beta$ au plus, si β est un nombre de seconde espèce, et d'indice $\omega(\beta - 1) + 1$ au plus, si β est un nombre de première espèce.*

THÉORÈME II. *Un élément E de classe $\alpha + 2$ peut être criblé au moyen d'un crible C_α rectiligne (α) d'indice réel $\omega \cdot 2$ au plus.*

Au moyen de ces deux théorèmes et de l'inégalité IV de Sierpinski ([2]) nous définissons les indices réels des ensembles mesurables B des classes finies. Nous désignons un élément de classe α par él α; un ensemble de classe α accessible inférieurement, par Inf α; et un ensemble de classe α inaccessible des deux cotés; par Inac α. Alors voici les indices réels des ensembles ici considérés:

$$n > 0 \quad K_{2n} \begin{cases} \text{él} & \operatorname{Ind} = \omega^n \\ \text{Inf} & \operatorname{Ind} = \omega^n + 1 \\ \text{Inac} & \operatorname{Ind} = \omega^n + 1 \end{cases}$$

$$n > 0 \quad K_{2n+1} \begin{cases} \text{él} & \operatorname{Ind} = \omega^n \cdot 2 \\ \text{Inf} & \operatorname{Ind} = \omega^n + 1 \\ \text{Inac} & \omega^n \cdot 2 \leqslant \operatorname{Ind} \leqslant \omega^{n+1}. \end{cases}$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

А. А. ЛЯПУНОВ

О ПОДКЛАССАХ B-МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В настоящей статье видоизменяется определение подклассов таким образом, что взаимно дополнительные множества попадают в один подкласс. Структура новых подклассов весьма близка к структуре классов.

В настоящей работе я ставлю себе задачу углубить изучение понятия подкласов ([1,2]) С этой целью я несколько видоизменяю самое определение подклассов с тем, чтобы два взаимно дополнительных множества входили в один подкласс. Это видоизменение влечет за собой установление некоторой аналогии в строении подклассов со строением классов. Кроме того, я даю некоторые примеры, иллюстрирующие тот факт, что первый класс с точки зрения разбиения его на подклассы существенно отличается от высших классов. Некоторые проблемы, встающие в связи с этим, до сих пор решить не удалось.

I. Пусть E есть множество класса α. Мы скажем, что e есть изолированный элемент множества E, если e есть элемент класса α и существует множество H класса $<\alpha$ такое, что $E \cdot H = e$. Множество H мы назовем отделителем множества e.

Для определения подкласса некоторого B-множества E класса α, расположенного в фундаментальной области J_x, мы поступим следующим образом:

Удалим из J_x счетное число попарно непересекающихся множеств классов $<\alpha$, каждое из которых принадлежит целиком либо множеству E, либо его дополнению. Оставшийся элемент класса α обозначим $J^{(1)}$. Очевидно, это множество может быть пусто, только если E класса $<\alpha$ или если оно принадлежит к базе α. Обозначим через $E^{(1)}$ и $CE^{(1)}$ части множеств E и CE, принадлежащие множеству $J^{(1)}$.

Пусть теперь $\beta = \beta^* + 1$ и множества $J^{(\beta^*)}$, $E^{(\beta^*)}$ и $CE^{(\beta^*)}$ уже определены. Мы удалим из $J^{(\beta^*)}$ счетное число элементов класса α, являющихся изолированными элементами множества $J^{(\beta^*)}$ и при-

надлежащих либо множеству $E^{(\beta^*)}$, либо множеству $CE^{(\beta^*)}$. Можно считать, что отделители всех этих элементов попарно не имеют общих точек. Мы обозначим через $J^{(\beta)}$ оставшийся элемент класса α и через $E^{(\beta)}$ и $CE^{(\beta)}$ части множеств E и CE, входящие в него.

Предположим теперь, что β есть число второго рода и что множества $J^{(\beta')}$, $E^{(\beta')}$ и $CE^{(\beta')}$ для всех чисел $\beta' < \beta$ уже определены. Мы положим

$$J^{(\beta)} = \prod_{\beta' < \beta} J^{(\beta')}$$

и обозначим через $E^{(\beta)}$ и $CE^{(\beta)}$ части множеств E и CE, принадлежащие $J^{(\beta)}$. Таким образом мы приходим к монотонной последовательности множеств:

$$J_x = J^{(0)} > J^{(1)} > J^{(2)} > \ldots > J^{(\beta)} > \ldots /\Omega.$$

Мы будем называть эту последовательность фундаментальной последовательностью множества E.

Из теоремы М. А. Лаврентьева ([1,2]) следует, что для всякого множества класса α найдутся последовательности такого типа, в которых все множества $J^{(\beta)}$, начиная с некоторого числа γ, будут пусты. Это число γ мы назовем длиной фундаментальной последовательности. Фундаментальную последовательность, для которой γ достигает своего минимума, мы назовем минимальной последовательностью* множества E. Очевидно, последовательность будет одновременной минимальной последовательностью для множеств E и CE. Мы будем различать два случая:

1° Длина минимальной последовательности множества E есть число первого рода $\gamma = \gamma^* + 1$. В этом случае мы скажем, что E есть множество подкласса γ^*.

2° Эта длина есть число второго рода. Тогда мы будем говорить, что E есть множество подкласса γ.

Совершенно очевидно, что это определение очень близко к определению, данному Н. Н. Лузиным и М. А. Лаврентьевым. В тех случаях, где это не может повести к недоразумению, мы будем писать вместо «множество класса α и подкласса β» просто «множество подкласса β».

II. Рассмотрим, каким образом может оканчиваться минимальная последовательность некоторого множества E класса α. Очевидно, могут представиться следующие четыре случая:

1) $J^{(\gamma)} = 0$ 3) $J^{(\gamma)} \subset E$

2) $J^{(\gamma)} \subset CE$ 4) $J^{(\gamma)} = P + Q;\ P \subset E;\ Q \subset CE.$

* В дальнейшем мы это понятие немного уточним.

Сообразно тому, какой из этих случаев имеет место, мы назовем нашу последовательность последовательностью первого, второго и т. д. вида. Очевидно последовательность может быть первого вида только в том случае, если γ есть число второго рода. Условимся называть последовательность минимальной, если она при минимальной длине имеет еще и минимальный вид. Если некоторое множество имеет фундаментальные последовательности длины γ второго и третьего вида и γ есть число второго рода, то оно имеет и фундаментальную последовательность длины γ первого вида; если же γ первого рода, то—более короткую последовательность. Эта последовательность может быть получена таким образом: каждый раз, строя множество $J^{(\beta)}$, следует выкидывать все то, что выкинуто хотя бы в одной из данных последовательностей при построении множества с тем же номером. Множество E класса α и подкласса β, имеющее минимальную последовательность вида δ, мы будем называть множеством вида δ.

Легко убедиться в том, что имеют место следующие факты:

1° Дополнение к множеству класса α подкласса β вида δ ($\delta = 1, 2, 3, 4$) есть множество того же класса α подкласса β и вида δ' ($\delta' = 1, 3, 2, 4$).

2° Если E есть множество класса α подкласса β и вида 3 (или 4), а H множество класса $< \alpha$, не имеющее общих точек с $E^{(\beta)}$, то множество $E \cdot H$ есть множество не выше, чем класса α подкласса β вида 1 (или 2).

3° Всякое множество вида 4 есть сумма множества вида 2 и множества вида 3.

Для доказательства последнего утверждения достаточно доказать, что множества P и Q, рассмотренные выше, суть элементы класса α, так как в таком случае они отделимы друг от друга множествами класса $< \alpha$, а эти отделители на основании свойства 2 дадут нужное разбиение.

Доказательство. Обозначим через H_1 сумму отделителей множества P, а через H_2 сумму отделителей множества Q при образовании $J^{(\beta+1)} = 0$. Тогда имеем:

$$P = J^{(\beta)} \cdot CH_2; \quad Q = J^{(\beta)} \cdot CH_1,$$

откуда ясно, что P и Q суть элементы класса α.

Во многих отношениях множества первого вида аналогичны множествам базы; множества второго вида — множествам, достижимым снизу; множества третьего вида — элементам и множества четвертого вида — множествам недостижимым.

III. Из теоремы М. А. Лаврентьева немедленно следует существование в каждом классе α всех подклассов β, в каждом под-

классе β^* (где β^* есть число второго рода) — существование всех четырех типов, а в каждом подклассе β (где β есть число первого рода) — существование всех типов, кроме первого.

IV. Очевидно, часть множества E класса α и подкласса β заключенная в некотором множестве класса α, достижимом снизу,, будет не выше, чем множество класса α и подкласса $(\beta+1)$. Отсюда следует, что произведение двух множеств класса α и подклассов β и γ будет не выше, чем множество класса α и подкласса, равного наименьшему из чисел $(\beta+1)\gamma$ и $(\gamma+1)\beta$.

Чтобы в этом убедиться, следует провести разложение этого множества в фундаментальную строчку таким образом: сперва разложить часть его, принадлежащую первым отделителям для одного из сомножителей, затем — вторым отделителям и т. д. Так как дополнение принадлежит к тому же подклассу, то это будет справедливо и для суммы.

V. Покажем, что в подклассах имеет место аналог первого принципа отделимости. (Аналога второго принципа нам установить не удалось.)

ТЕОРЕМА. *Два множества E_1 и E_2 подкласса β третьего вида всегда отделимы множествами низших подклассов или множествами подкласса β первого вида.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ последние элементы минимальных последовательностей множеств E_1 и E_2. Они отделимы множествами H_1 и H_2 класса $<\alpha$ (или базы α). Можно считать, что $H_1+H_2=J_x$. Множества $E_1\cdot H_2$ и $E_2\cdot H_1$ суть во всяком случае множества подкласса $<\beta$ (или подкласса β первого вида). Кроме того, эти множества отделимы друг от друга множествами H_1 и H_2, поэтому их сумма имеет такой же подкласс.

Следовательно, множества

$$\Theta_1=H_1+E_1\cdot H_2-E_2\cdot H_1\supset E_1,$$
$$\Theta_2=H_2+E_2\cdot H_1-E_1\cdot H_2\supset E_2$$

удовлетворяют всем поставленным условиям.

VI. Для множеств первого класса можно построить плоское B-множество E, в некотором смысле «универсальное» для подклассов. Именно, всякая прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку конститутанты номера α дополнения к некоторому аналитическому множеству, пересекает множество E по множеству первого класса и подкласса в точности α. Аналогичного множества для классов >1 построить не удается.

Пусть P есть некоторое совершенное нигде не плотное множество, расположенное на отрезке $(0, 1)$. Его смежные интервалы

можно занумеровать всеми рациональными числами, заключенными между нулем и единицей, так что из двух интервалов более правому будет соответствовать больший номер. Представив номер каждого смежного в виде несократимой дроби, мы можем разбить все смежные на два семейства, смотря по тому, будет ли числитель дроби четным или нечетным. Мы будем называть их четными и нечетными смежными.

Построим теперь систему совершенных множеств $\{P_{r_n}\}$, где r_n есть некоторое рациональное число, имеющую следующее свойство: если $r_{n_1} > r_{n_2}$, тогда

$$P_{r_{n_1}} \subset P_{r_{n_2}}$$

и первое нигде не плотно на последнем.

Пусть P_0 есть весь отрезок $(0, 1)$, P_1 произвольное совершенное, нигде не плотное множество. $P_{1/2}$ мы построим следующим образом: в каждый смежный P_1 мы вставим некоторое совершенное, нигде не плотное множество и возьмем сумму P_1 и всех этих множеств. Вообще, если построены все множества P_{r_n}, где $n < n_0$, то $P_{r_{n_0}}$ мы построим так: возьмем ближайшие к r_{n_0} сверху и снизу числа r_{n_1} и r_{n_2} $(r_{n_1} > r_{n_2})$, для которых $P_{r_{n_1}}$ и $P_{r_{n_2}}$ уже построены. Обозначим через $P^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ совершенные множества, являющиеся общей частью множества $P_{r_{r_2}}$ и некоторого смежного к множеству $P_{r_{n_1}}$. На каждом из этих множеств мы построим по совершенному, нигде не плотному множеству $Q^{(n)}$ и назовем:

$$P_{r_{n_0}} = P_{r_{n_1}} + \sum_n Q^{(n)}.$$

Для каждого из множеств P_{r_n} мы определим четные и нечетные смежные. Рассмотрим теперь некоторую систему рациональных чисел:

$$r_{n_1} < r_{n_2} < \ldots < r_{n_\alpha} \ldots < r_{n_\beta}.$$

Соответствующие им множества $P_{r_{r_\alpha}}$ образуют монотонную последовательность. Мы обозначим сумму частей множества $P_{r_{n_\alpha}}$, попавших в четные смежные множества $P_{r_{n_{\alpha+1}}}$, через $Q^{+}_{r_{n_\alpha}}$, а через $Q^{-}_{r_{r_\alpha}}$ сумму частей $P_{r_{n_\alpha}}$, попавших в нечетные смежные $P_{r_{n_{\alpha+1}}}$. Составим теперь сумму

$$\sum_{\alpha < \beta} Q^{+}_{r_{n_\alpha}} = Q^{+}.$$

Очевидно, это множество первого класса подкласса β второго вида, так как последовательность

$$P_{r_{n_1}}, P_{r_{n_2}}, \ldots, P_{r_{n_\alpha}}, \ldots, P_{r_{n_\beta}}$$

есть минимальная последовательность этого множества и

$$P_{r_{n_\beta}} \subset CQ^{+}.$$

Далее мы будем обозначать $B^+_{r_n}$ и $B^-_{r_n}$ совокупность четных и нечетных, смежных к P_{r_n}.

VII. Пусть на грани XOZ фундаментального куба пространства $OXYZ$ расположено некоторое элементарное решето C, состоящее из отрезков, параллельных оси абсцисс, расположенных на прямых $z=z_0$, где z_0 — рациональное число.

Обозначим $D^+_{r_n}$ и $D^-_{r_n}$ множества всех точек указанного куба, проектирующихся на ось OY в множества $B^+_{r_n}$ и $B^-_{r_n}$, а на плоскость OXZ в точки решета C, лежащие на прямой $z=r_n$. Пусть D^+ и D^- обозначают сумму всех $D^+_{r_n}$ и $D^-_{r_n}$. Пусть далее R_{r_n} есть множество всех точек того же куба, проектирующихся на ось OY в множество P_{r_n}, а на плоскость OXZ в точки решета C, лежащие на прямой $z=r_n$. Обозначим через R сумму всех R_{r_n}. Множества R, D^+ и D^- суть счетно-формные B-множества. Обозначим через R_M верхнее множество Мазуркевича для множества R. R_M есть униформное B-множество. Обозначим через N множество точек (x_1, y_1, z_1) таких, что существует точка $(x_1, y_1, z_2) \subset R_M$ и $z_2 > z_1$. N есть также B-множество. Пусть теперь

$$I^+ = D^+ \cdot N; \quad I^- = D^- \cdot N.$$

Обозначим через I^+_M и I^-_M верхние множества Мазуркевича для множеств I^+ и I^-. Так как I^+ и I^- суть счетно-формные B-множества, множества I^+_M и I^-_M суть также униформные B-множества. Пусть I есть множество точек (x_1, y_1, z_1), входящих в I^+_M и таких, что ни одна точка вида (x_1, y_1, z_2), где $z_2 > z_1$, не входит в I^-_M. Множество I, а следовательно и его проекция T на плоскость OXY есть B-множество. Я утверждаю, что общая часть множества T и прямой $x = x_0$, где x_0 принадлежит к внешней конституанте номера β, определенной решетом C, есть множество первого класса подкласса β второго вида. Для доказательства мы построим минимальную строчку указанного множества, которое обозначим через T_{x_0}.

VIII. Пусть плоскость $x = x_0$ рассекает решето C в точках, где координата z имеет следующие значения*:

$$r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_\alpha}, \ldots, r_{n_\beta}. \qquad (1)$$

Тогда, применяя обозначения п. 6, можно показать, что

$$T_{x_0} = \sum_{\alpha<\beta} Q^+_{r_{n_\alpha}}.$$

* Мы предполагаем, что прямая $z=1$ целиком принадлежит решету C, и называем номером конституанты номер наивысшей точки решета, лежащей на соответствующем перпендикуляре.

Действительно, всякая прямая, параллельная оси OZ, проходящая через точку множества T_{x_0}, пересекает одно из множеств $D^+_{r_{n'}}$, $D^-_{r_{n'}}$ или $R_{r_{n'}}$, где $r_{n'}$ есть некоторое число из строчки (1), и не пересекает ни одного из множеств $D^+_{r_{n''}}$, $D^-_{r_{n''}}$ и $R_{r_{n''}}$, где число $r_{n''}$ в строчку (1) не входит. Очевидно, совокупность всех множеств $Q^+_{r_{n_\alpha}}$, $Q^-_{r_{n_\alpha}}$ и $P_{r_{n_\beta}}$ попарно без общих точек и в сумме составляет весь отрезок (0, 1).

Рассмотрим точку, лежащую в плоскости OXY на прямой $x = x_0$ и проектирующуюся на ось OY в множество $P_{r_{n_\beta}}$. Проведем параллель оси OZ через эту точку. Так как множество $P_{r_{n_\beta}}$ есть необходимо P_1 и оно принадлежит всем множествам $P_{r_{n'}}$, то в выбранную нами точку не проектируется ни одной точки множества I. Следовательно, точка не принадлежит множеству T_{x_0}.

Пусть теперь выбранная нами точка принадлежит некоторому $Q^-_{r_{n_\alpha}}$; тогда указанная параллель оси OZ пересечет множества $R_{r_{n_{\alpha+1}}}$ и $D^-_{r_{n_\alpha}}$. Таким образом внутри множества N наивысшая точка этой параллели, проектирующаяся на плоскость OXZ в точку решета C, будет принадлежать множеству $\bar{I}_M$ и, следовательно, выбранная точка не войдет в множество T_{x_0}. Наконец, если точка принадлежит некоторому множеству $Q^+_{r_{n_\alpha}}$, то мы таким же образом убедимся в том, что она входит в T_{x_0}. Отсюда следует, что минимальная строчка для T_{x_0} будет

$$P_{r_{n_1}},\ P_{r_{n_2}}, \ldots,\ P_{r_{n_\alpha}}, \ldots\ P_{r_{n_\beta}}$$

и так как $P_1 \cdot T_{x_0} = 0$, то множество T_{x_0} будет действительно первого класса подкласса β второго вида.

IX. Для построения аналогичного множества для любого класса α нужно хотя бы с помощью параметрических трансформаций, введенных Н. Н. Лузиным, преобразовать множество первого класса подкласса β в множество класса α подкласса β. Очевидно, что подкласс образа не может быть больше β. Однако не ясно, как достигнуть того, чтобы он в точности равнялся β. Единственный факт, который мы смогли установить непосредственно, состоит в том, что если известна минимальная последовательность некоторого множества класса α, то можно построить такую трансформацию, которая преобразует его в некоторое множество первого класса, того же подкласса и вида. Чтобы этого достигнуть, следует несколько изменить указанную трансформацию.

Пусть множество E' класса α подкласса β разбито при образовании минимальной последовательности на семейство элементов класса α $\{E_n\}$ и пусть $\{H_n\}$ есть семейство соответствующих от-

делителей. Для построения искомой функции мы поступим следующим образом. Пусть $E_n = \prod\limits_m \mathcal{E}_n^m$, где все $\mathcal{E}_n^m$ суть множества классов $< \alpha$, и $E = \lim \mathcal{E}_m$, где все $\mathcal{E}^m$ суть также множества классов $< \alpha$. Перенумеруем все множества $\mathcal{E}_n^m$, $\mathcal{E}_m$ и H_n заново и образуем систему множеств g_n, в которой каждое g_n есть либо некоторое H_n, либо $\mathcal{E}_n^m$, либо $\mathcal{E}_n$ и каждое из них есть некоторое g_n.

Пусть непрерывная на иррациональных точках и разнозначная функция $f_n(x)$ отображает g_n на порцию $(0, 1/2)$, а множество Cg_n на порцию $(1/2, 1)$ с точностью до счетного числа точек. Повторяя далее рассуждения Лузина, получим искомую трансформацию.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
5. I. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

1 Lavrentieff M., Sur les sous-classes des ensembles mesurables B, C. R., 1925, 12 janv.

2 Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930.

ALEXIS LIAPOUNOFF. SUR LES SOUS-CLASSES DES ENSEMBLES MESURABLES *B*

RÉSUMÉ

Nous modifions dans cet article la définition des sous-classes en conservant l'idée fondamentale sur laquelle cette définition est basée[1,2]. Notre définition est telle que deux ensembles complémentaires l'un de l'autre appartiennent à la même sous-classe. Il suit du théorème de M. Lavrentieff que toutes les sous-classes existent effectivement.

Il existe dans chaque sous-classe une famille d'ensembles qui par rapport à la sous-classe toute entière est en quelque sorte analogue à la famille des éléments de classe α. En particulier deux ensembles disjoints de cette famille sont toujours séparables au moyen d'ensembles de sous-classes inférieures. Une autre famille d'ensembles est analogue à la base α. Elle existe seulement dans les sous-classes de deuxième espèce. Nous construisons un ensemble plan T mesurable B et un complèmentaire analytique linéaire tel que toute droite perpendiculaire à l'axe OX, passant par un point de la constituante α de cet ensemble, coupe l'ensemble T suivant un ensemble de classe 1 et de sous-classe α. Il est bien difficile de construire un tel ensemble pour les classes > 1.

Nous démontrons encore que parmi les transformations étudiées par N. Lusin il en existe de telles qui conservent la sous-classe.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Отделение математических и естественных наук
Classe des sciences mathématiques et naturelles

А. В. ГРОШЕВ

К МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье доказана теорема из теории диофантовых приближений. Рассматривается линейная форма, однородная относительно целочисленных переменных и неоднородная относительно вещественных коэффициентов. Дается метрический закон приближения к нулю такой формы.

В некоторых вопросах теории диофантовых приближений (например в теореме Кронекера) рассматриваются системы линейно независимых вещественных чисел $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, т. е. таких, для которых обращение в нуль выражения

$$a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \ldots + a_s\theta_s + b \tag{1}$$

невозможно при целых, не равных одновременно нулю $a_1, \ldots, a_s, b$.

В тех случаях, когда рассматривается не одна система (θ_i), а множество систем, они оказываются в некоторых отношениях неравноценными, в зависимости от быстроты приближения к нулю формы (1) при возрастании $|a_i|$. Известно, что если рассматривать все системы (θ_i), т. е. все точки s-мерного пространства, и потребовать, чтобы неравенство

$$|a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \ldots + a_s\theta_s + b| < \psi(n),\ n = \max\{|a_1|, \ldots, |a_s|\} \tag{2}$$

в любой точке имело бесконечное множество решений в целых a_i, b, то в качестве $\psi(n)$ можно взять функцию, убывающую не быстрее, чем $\frac{C}{n^s}$, где C—некоторая константа.

Естественно поставить такой вопрос: каким условиям должна удовлетворять функция $\psi(n)$, чтобы неравенство (2) только почти всюду (т. е. с точностью до множества меры нуль в s-мерном пространстве) имело бесконечное множество решений в целых a^i, b?

Этот вопрос для случая $s = 1$ разрешен в одной из работ А. Я. Хинчина [1]. В настоящей статье дается решение этого вопроса для любого числа измерений $s \geqslant 2$, а именно, доказывается

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\psi(t)$ *положительная непрерывная функция положительного аргумента, и при* $t \to \infty$ $t^s\psi(t) \to 0$, *причем* $t^{s-1}\psi(t)$ *убывает монотонно. Тогда, для того чтобы неравенство* (2) *почти для всякой системы чисел* $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *имело бесконечное множество решений в целых* $a_1, a_2, \ldots, a_s, b$, *необходимо и достаточно, чтобы интеграл*

$$\int^{\infty} t^{s-1}\psi(t)\,dt \tag{3}$$

расходился.

Замечание. Из двух ограничений, наложенных на $\psi(t)$, первое ($t^s\psi(t) \to 0$) является естественным после сказанного во введении. Монотонность убывания $t^{s-1}\psi(t)$ нужна по ходу доказательства.

Примерами функций, удовлетворяющих всем условиям теоремы, включая и расходимость интеграла, могут служить

$$\frac{1}{t^s \log t}, \quad \frac{1}{t^s \log t \log \log t} \quad \text{и т. д.}$$

ЛЕММА 1*. *Пусть* $u(t)$ *положительная непрерывная функция, причем* $t^{s-1}u(t)$ *монотонно убывает,* $t^s u(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и интеграл*

$$\int^{\infty} t^{s-1} u(t)\,dt$$

расходится.

Тогда можно найти функцию $\pi(t)$ *со следующими свойствами:*

1) $\pi(t)$ *неограниченно и монотонно возрастает при* $t \to \infty$;

2) $t^{s-1}u\{t\pi(t)\}$ *монотонно стремится к нулю при* $t \to \infty$;

3) *интеграл*

$$\int^{\infty} t^{s-1} u\{t\pi(t)\}\,dt$$

расходится.

Доказательство. При условиях леммы, очевидно, можно найти такую положительную непрерывную, монотонно стремящуюся к нулю функцию $\varepsilon(t)$, чтобы интеграл

$$\int^{\infty} t^{s-1} u(t)\,\varepsilon(t)\,dt$$

расходился.

Определим положительную функцию $v(x)$:

$$\{v(x)\}^s = s\int_0^x t^{s-1}\varepsilon(t)\,dt,$$

* Лемма является усилением леммы 2 из работы А. Я. Хинчина (2). Методы этой работы использованы в ряде пунктов настоящей статьи.

причем, очевидно, $\varphi(x)$ при $x \to \infty$ неограниченно и монотонно возрастает. Полагая $t = xz$, имеем:

$$\left\{ \frac{\varphi(x)}{x} \right\}^s = \frac{s}{x} \int_0^x \left(\frac{t}{x} \right)^{s-1} \varepsilon(t)\, dt = s \int_0^1 z^{s-1} \varepsilon(xz)\, dz,$$

откуда видно, что $\frac{\varphi(x)}{x}$ при $x \to \infty$ монотонно убывает, приближаясь к нулю.

Пусть теперь $x = \tau(y)$ однозначная положительная функция, определенная из равенства $y = \varphi(x)$. Очевидно, при $y \to \infty$ отношение $\frac{\tau(y)}{y}$ монотонно и неограниченно возрастает. Положим

$$\pi(t) = \frac{\tau(t)}{t}.$$

Определенная таким образом $\pi(t)$ обладает свойством 1. Наличие свойства 2 почти очевидно.

Полагая

$$u(t) = \frac{1}{t^{s-1} u_1(t)},$$

из монотонного стремления к нулю $t^{s-1} u(t)$ заключаем, что $u_1(t)$ неограниченно и монотонно возрастает при $t \to \infty$.

Из равенства

$$u\left\{ t\pi(t) \right\} = \frac{1}{t^{s-1} \left\{ \pi(t) \right\}^{s-1} u_1 \left\{ t\pi(t) \right\}}$$

следует, что $t^{s-1} u \left\{ t\pi(t) \right\}$ монотонно стремится к нулю (свойство 2).

Дальше, производя замену переменных $\tau(t) = \eta$, $t = \varphi(\eta)$, получаем:

$$\int^N t^{s-1} u \left\{ t\pi(t) \right\} dt = \int^N t^{s-1} u \left\{ \tau(t) \right\} dt =$$
$$= \int^{\tau(N)} \eta^{s-1} u(\eta)\, \varepsilon(\eta)\, d\eta \to \infty \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Ч. Т. Д.

ЛЕММА 2. *В пространстве s измерений $(s > 3)$* дано тело K, ограниченное четырьмя попарно параллельными гиперплоскостями P_1, P_2, P_3, P_4 $(P_1 \| P_2,\ P_3 \| P_4)$ и гиперсферой радиуса R, пересекающей все четыре плоскости. Расстояние между P_1 и P_2 равно $2h_1$, расстояние между P_3 и P_4 равно $2h_2$. Гиперплоскости P_1 и P_3 (следовательно, и P_2 и P_4) пересекаются под углом, синус которого равен α.*

Тогда объем V тела K удовлетворяет неравенству

$$V \leqslant 2^{s-2} R^{s-2} \frac{4 h_1 h_2}{\alpha}.$$

* При $s = 2$ и $s = 3$ предложение тривиально.

Доказательство. Рассмотрим гиперплоскость P, параллельную P_1 и P_2 и находящуюся на равных от них расстояниях, и гиперплоскость P', также расположенную относительно P_3 и P_4.

Расположим прямоугольную систему координат $OX_1X_2 \ldots X_s$ так, чтобы P и P' имели соответственно уравнения

$$x_2 = 0 \quad \text{и} \quad ax_1 + bx_2 = 0, \quad a > 0,$$

что, очевидно, возможно.

Координаты точек, заключенных между P_1 и P_2, удовлетворяют неравенству $|x_2| < h_1$, координаты точек, заключенных между P_3 и P_4,—неравенству

$$\left|\frac{ax_1 + bx_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < h_2,$$

откуда следует

$$V \leqslant \int\limits_{p_s}^{q_s} dx_s \int\limits_{p_{s-1}}^{q_{s-1}} dx_{s-1} \ldots \int\limits_{p_3}^{q_3} dx_3 \int\limits_{-h_1}^{h_1} dx_2 \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx_1,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{-h_2\sqrt{a^2+b^2} - bx_2}{a}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2\sqrt{a^2+b^2} - bx_2}{a}$$

и p_i, q_i $(i = 3, \ldots, s)$ константы, $q_i - p_i \leqslant 2R$.

Следовательно,

$$V \leqslant (2R)^{s-2}\,\frac{4h_1h_2\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Косинус угла между P и P' равен $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \alpha$.

Переходим к доказательству основной теоремы.

Необходимость признака. Пусть интеграл (3) сходится. Рассмотрим в пространстве s измерений единичный куб $(0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, s)$ и множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ этого куба, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s + b| < \psi(n), \quad n = \max\{|a_1|, \ldots, |a_s|\}, \tag{4}$$

где a_i, b — данные целые числа.

Очевидно, это множество есть часть множества точек, находящихся от гиперплоскости

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s + b = 0 \tag{5}$$

на расстоянии, не превышающем δ, где

$$\delta = \frac{\psi(n)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2}} \leqslant \frac{\psi(n)}{n},$$

а именно, множество точек, входящих в часть s-мерного единичного куба, ограниченную двумя гиперплоскостями, параллельными (5) и отстоящими от нее на расстоянии δ. Будем называть эту часть куба гиперполосой или просто полосой, в случае на-

добности — полосой, порожденной плоскостью (5). Кроме того, условимся называть натуральное число n, равное

$$\max \{ |a_1|, \ldots, |a_s| \},$$

рангом плоскости (5) и порожденной ею полосы

Для получения всех возможных полос ранга n достаточно в уравнении (5) варьировать целые a_i, b, соблюдая условие $|a_i| \leqslant n$, при наличии хотя бы одного равенства $|a_j| = n$. Кроме того, так как полосы порождаются лишь плоскостями (5) или пересекающимися с единичным кубом или достаточно близкими к нему, то, как легко видеть, в уравнениях этих плоскостей

$$\max |b| < c_1 n, \tag{6}$$

где c_1 — положительная константа, зависящая только от s.

(В дальнейшем через c_2, c_3, ..., c будут обозначены константы, зависящие также самое большее от s.)

Пусть E_n ($n = 1, 2, \ldots$) обозначает множество всех точек, входящих в полосы ранга n. Очевидно, всякая точка единичного куба, удовлетворяющая условию (4) хотя бы при одной системе значений a_i, b, входит в E_n и обратно.

Оценим меру множества E_n.

Из определения гиперполосы ранга n следует, что ее объем V_n при любых допустимых значениях a_i, b удовлетворяет неравенству

$$V_n < c_2 \frac{\psi(n)}{n}. \tag{7}$$

Чтобы оценить сверху число полос ранга n, достаточно оценить число плоскостей (5) при a_i, b, варьирующих в пределах: $|a_i| \leqslant n$ при наличии хотя бы одного равенства

$$|a_j| = n; \quad \max |b| < c_1 n.$$

Очевидно, это число меньше, чем $c_3 n^s$. Обозначая (как и в дальнейшем) через $\mathrm{M}E_n$ меру множества E_n, получим

$$\mathrm{M}E_n < c_2 c_3 n^{s-1} \psi(n).$$

Рассмотрим бесконечную последовательность множеств E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ При сходимости интеграла (3) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}E_n$$

сходится и, следовательно, множество точек, входящих в бесконечное множество членов последовательности (E_n), т. е. удовлетворяющих бесконечное множество раз неравенству вида (4), имеет меру нуль. Таким образом первая часть теоремы доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь п р и з н а к а. Пусть интеграл (3) расходится. Условимся прежде всего в ряде терминов и обозначений, которыми в дальнейшем будем пользоваться.

a) При расходимости интеграла (3) функция $\psi(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 1. Определив для $\psi(t)$ функцию $\pi(t)$, существование и свойства которой доказаны в лемме, положим

$$\omega(t) = \psi\{t\pi(t)\}.$$

Тогда

$$\int^{\infty} t^{s-1}\omega(t)\,dt \tag{8}$$

расходится,

$$t^s\omega(t) \to 0; \quad t^{s-1}\omega(t) \quad \text{и} \quad \omega(t) \to 0 \tag{8'}$$

монотонно при $t \to \infty$

$$\omega(t) < \psi(t). \tag{8''}$$

b) Будем называть нормальными гиперплоскостями ранга n $(n = 1, 2, \ldots)$ плоскости

$$nx_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s - b = 0, \tag{9}$$

где $a_2, \ldots, a_s$, b — целые положительные числа, $a_i \leqslant n$; $(n, b) = 1$, т. е. n и b взаимно простые.

Условимся обозначать через $P(n, a_i, b)$ нормальную плоскость (9) с фиксированными n, a_i, b; через $P(n, a_i)$ семейство нормальных плоскостей ранга n с фиксированными a_i и варьирующим b, и, вообще, через $P(n, y, z, \ldots)$ семейство нормальных плоскостей (9) с фиксированными n, y, z и варьирующими остальными параметрами.

c) Часть s-мерного единичного куба, заключенную между двумя плоскостями, параллельными нормальной плоскости $P(n, a_i, b)$, лежащими по разные ее стороны и отстоящими от нее на расстоянии

$$\delta_1 = \frac{\omega(n)}{\sqrt{n^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2}} < \frac{\omega(n)}{n}, \tag{10}$$

будем называть нормальной гиперполосой (или просто полосой) ранга n, порожденной плоскостью $P(n, a_i, b)$; плоскость же по отношению к полосе — несущей плоскостью.

Пусть E'_n обозначает множество всех точек, входящих в нормальные полосы ранга n. Очевидно, каждая точка $(x_1, \ldots, x_s)$ множества E'_n удовлетворяет условию

$$|nx_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s - b| < \omega(n), \quad 0 < a_i \leqslant n, \\ b > 0, \quad (n, b) = 1 \tag{11}$$

хотя бы при одной допустимой системе значений a_i, b.

d) Рассмотрим два множества E'_n и $E'_{n'}$ при $n' < n$. Второе из них образовано точками нормальных полос ранга n', порожденных плоскостями $P(n')$

$$n'x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_sx_s - b' = 0,\ 0 < a'_i \leqslant n',\ b' > 0,\ (n', b') = 1. \tag{12}$$

Обозначим через $E'_{n,n'}$ множество точек, общих для E'_n и $E'_{n'}$. $E'_{n,n'}$ образовано s-мерными телами, лежащими внутри единичного куба, получающимися в пересечении нормальных полос ранга n с нормальными полосами ранга n'.

В дальнейшем придется оценить $ME'_{n,n'}$, для чего удобно ввести еще некоторые обозначения.

Пусть $\alpha = \alpha\ (n,\ a_i;\ n',\ a'_i)$ обозначает синус угла между плоскостями $P\ (n,\ a_i,\ b)$ и $P\ (n',\ a'_i,\ b')$. Пересечем полосы, порожденные семейством плоскостей $P\ (n,\ y,\ z,\ \ldots)$, полосами, порожденными семейством $P\ (n',\ y',\ z',\ \ldots)$; выберем общие части (или, коротко, пересечения) тех пар полос, несущие плоскости которых удовлетворяют некоторому условию $\{\alpha\}$, наложенному на синус угла их наклона, и обозначим сумму объемов этих пересечений через

$$V\ (n,\ y,\ z,\ \ldots\ ;\ n',\ y',\ z',\ldots;\ \{\alpha\}).$$

Тогда, например, $V\ (n;\ n';\ \alpha \neq 0)$ будет обозначать сумму объемов пересечений (т. е. общих частей) всех нормальных полос ранга n со всеми нормальными полосами ранга n', за исключением тех пар полос, несущие плоскости которых параллельны между собой.

Аналогично обозначим через $\nu\ (n, y, z, \ldots;\ n', y', z', \ldots;\ \{\alpha\})$ число пересечений полос, порожденных семейством $P\ (n, y, z, \ldots)$, с полосами, порожденными $P\ (n',\ y',\ z',\ \ldots)$, при соблюдении условия $\{\alpha\}$, и через $N\ (n, y, z, \ldots; n', y', z', \ldots; \{\alpha\})$— число пересечений внутри единичного куба плоскостей $P\ (n, y, z, \ldots)$ с плоскостями $P\ (n', y', z', \ldots)$ при условии $\{\alpha\}$.

Переходим теперь к доказательству достаточности данного в теореме признака.

I. В первую очередь оценим сверху $ME'_{n,n'}$. Как было указано в d), $E'_{n,n'}$ образовано s-мерными телами, получающимися при пересечении нормальных полос ранга n с нормальными полосами ранга n'. Разобьем эти тела на три группы, в зависимости от угла наклона плоскостей, несущих те полосы, пересечением которых является то или иное тело. Именно, будем различать случаи:

$$\alpha > \frac{1}{n}\ ,\ 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\ ,\ \alpha = 0.$$

При наших обозначениях, очевидно,

$$ME'_{n,n'} \leqslant V\left(n;\ n';\ \alpha > \frac{1}{n}\right) + \\ + V\left(n;\ n';\ 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\right) + V\ (n;\ n';\ \alpha = 0). \qquad (13)$$

Переходим к оценке слагаемых правой части этого неравенства.

1. В пересечении двух нормальных полос ранга n и n', несущие плоскости которых не параллельны, получается s-мерное тело с двумя парами параллельных граней (расположение остальных нас не интересует). Будем называть такое тело трубкой и докажем, что объем любой трубки удовлетворяет неравенству

$$V(n, a_i, b; n', a'_i, b'; \alpha > 0) < c_4 \frac{\omega(n)\,\omega(n')}{n\,n'\,\alpha}. \tag{14}$$

Пусть трубка образована пересечением полос, порожденных плоскостями $P(n, a_i, b)$ и $P(n', a'_i, b')$, причем $\alpha > 0$. Заменяя единичный куб описанной около него сферой, видим, что объем трубки можно оценить по лемме 2. Пользуясь (10) и обозначениями леммы, имеем

$$h_1 < \frac{\omega(n)}{n},\ h_2 < \frac{\omega(n')}{n'},\quad R = \frac{\sqrt{s}}{2},$$

откуда и получаем (14).

2. Сумма объемов всех трубок при фиксированных n и n' и $\alpha > \frac{1}{n}$ удовлетворяет неравенству

$$V\left(n;\ n';\ \alpha > \frac{1}{n}\right) < c_6 n^{s-1} n'^{s-1} \omega(n)\,\omega(n'). \tag{15}$$

Для доказательства возьмем семейство $P(n, a_i)$ параллельных между собой плоскостей, пересечем его плоскостью $P(n', a'_i, b')$ и оценим сверху число пересечений, происходящих внутри единичного куба, т. е. число $N(n, a_i; n', a'_i, b'; \alpha > 0)$.

Обозначив через l расстояние между двумя многообразиями $s-2$ измерений

$$\begin{cases} nx_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s - b = 0, \\ n'x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_sx'_s - b' = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} nx_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s - (b+1) = 0, \\ n'x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_sx_s - b' = 0, \end{cases}$$

т. е. между пересечениями $P(n', a'_i, b')$ с двумя соседними плоскостями из $P(n, a_i)$, и через h расстояние между двумя последними плоскостями, найдем

$$h \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2}} \geqslant \frac{1}{n\sqrt{s}},\quad l = \frac{h}{\alpha} \geqslant \frac{1}{\alpha n\sqrt{s}}.$$

Диаметр области пересечения $P(n', a'_i, b')$ с единичным кубом не больше $\sqrt{s}$. Сравнивая этот наибольший возможный диаметр l, найдем

$$N(n, a_i; n', a'_i, b';\ \alpha > 0) \leqslant \alpha n\sqrt{s} + 1. \tag{16}$$

В случае $\alpha > \frac{1}{n}$, т. е. $\alpha n > 1$, можно найти константу c_5 из условия $\alpha n\sqrt{s} + 1 < c_5 \alpha n$. Следовательно,

$$N\left(n, \alpha^i; n', a'_i, b';\ \alpha > \frac{1}{n}\right) < c_5 \alpha n. \tag{16'}$$

Установим теперь связь между числом пересечений плоскостей $P(n, a_i)$ и $P(n', a'_i, b')$ внутри единичного куба и числом порожденных этими плоскостями трубок, т. е. между $N(n, a_i; n', a'_i, b'; \alpha > 0)$ и $\nu(n, a_i; n', a'_i, b'; \alpha > 0)$.

Две пересекающиеся плоскости (9) и (12) порождают трубку, если их полосы пересекаются. При достаточно больших значениях n и n', т. е. при достаточно малых значениях $\omega(n)$ и $\omega(n')$, полосы пересекаются лишь тогда, если внутри единичного куба произойдет пересечение хотя бы одной плоскости из двух

$$nx_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s - b \pm \omega(n) = 0,$$

ограничивающих одну полосу, хотя бы с одной из двух плоскостей

$$n'x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_sx_s - b' \pm \omega(n') = 0,$$

ограничивающих другую полосу.

Таким образом оценка числа $\nu(n, a_i; n', a'_i, b'; \alpha > 0)$ сводится к оценке числа пересечений внутри единичного куба двух семейств плоскостей, получающихся параллельным перенесением семейства $P(n, a_i)$ на $\frac{\omega(n)}{\sqrt{n^2 + a^2 + \ldots + a_s^2}}$ в том и другом направлении, с двумя плоскостями, получающимися из $P(n', a'_i, b')$ параллельным перенесением на $\frac{\omega(n')}{\sqrt{n'^2 + a_2'^2 + \ldots + a_s'^2}}$. Из последнего соображения легко получим

$$\nu(n; a_i; n', a'_i, b'; \alpha > 0) \leqslant 4N(n, a_i; n', a'_i, b'; \alpha > 0). \tag{17}$$

При $\alpha > \frac{1}{n}$ из (16′) и (17) следует

$$\nu\left(n, a_i; n', a'_i, b'; \alpha > \frac{1}{n}\right) < 4c_5\,\alpha n.$$

Из последнего неравенства и (14), считая a_i, a'_i, b' в обеих формулах одинаковыми, получим

$$V\left(n, a_i; n', a'_i, b'; \alpha > \frac{1}{n}\right) < 4c_4c_5\frac{\omega(n)\,\omega(n')}{n'}. \tag{18}$$

Эта формула верна при любых $P(n, a_i)$, $P(n', a'_i, b')$, удовлетворяющих условию $\alpha > \frac{1}{n}$. Для оценки $V\left(n; n'; \alpha > \frac{1}{n}\right)$ остается учесть число пар $P(n, a_i)$, $P(n', a'_i, b')$ при варьирующих a_i, a'_i, b'. Замечая, что в силу (6) число допустимых значений b' будет меньше c_1n', а число значений каждого из коэффициентов a_i, a'_i $(i = 2, 3, \ldots, s)$ соответственно не больше n и n', из (18) получим (15).

3. Пусть теперь $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$. Докажем, что

$$V\left(n; n'; 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{n}\right) < c_8 n'^s\,\omega(n)\,\omega(n'). \tag{19}$$

Имеем

$$\alpha = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{s}(na'_i - n'a_i)^2 + \sum_{i<j}(a_ia'_j - a_ja'_i)^2}}{\sqrt{n^2+a_2^2+\ldots+a_s^2} \cdot \sqrt{n'^2+a'^2_2+\ldots+a'^2_s}}. \qquad (20)$$

Следовательно, при $\alpha > 0$ наименьшее возможное значение α равно $\frac{1}{nn's}$. Отсюда и из (14)

$$V\left(n, a_i, b; n', a'_i, b'; 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\right) < sc_4\omega(n)\omega(n'). \qquad (21)$$

Пересекая семейство $P(n, a_i)$ плоскостью $P(n', a'_i, b')$ при условии $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$, из (16) и (17) получим

$$\nu\left(n, a_i; n', a'_i, b'; 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\right) < 4(\sqrt{s}+1). \qquad (22)$$

Будем теперь варьировать a_i, a'_i, b' с тем, чтобы оценить число пар $P(n, a_i)$, $P(n', a'_i, b')$. Из (20) и $\alpha \leqslant \frac{1}{n}$ имеем

$$\sum_{i=2}^{s}(na'_i - n'a_i)^2 + \sum_{i<j}(a_ia'_j - a_ja'_i)^2 \leqslant s^2n'^2$$

или

$$\sum_{i=2}^{s}\left(\frac{n}{n'}a'_i - a_i\right)^2 + \frac{1}{n'^2}\sum_{i<j}(a_ia'_j - a_ja'_i)^2 \leqslant s^2.$$

Из последнего неравенства убеждаемся, что при любых фиксированных $a'_2, \ldots, a'_s$ каждое из чисел $a_2, \ldots, a_s$ может принять лишь ограниченное число значений, не превосходящее $2s$. Это значит, что, составляя семейства параллельных между собой плоскостей $P(n, a_i)$, пересекающихся с фиксированной плоскостью $P(n', a'_i, b')$ под условием $\alpha \leqslant \frac{1}{n}$, мы найдем, что число таких семейств ограничено сверху константой, зависящей только от s (т. е. не зависящей от a'_i, b', n', n). Варьируя в уравнении плоскости $P(n', a'_i, b)$ коэффициенты a'_i, b' в дозволенных пределах $|a'_i \leqslant n', b' < c_1n'|$, из (22) получим

$$\nu\left(n; n'; 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\right) < c_7n'^s.$$

Отсюда и из (21) получаем (19).

Замечание. При выводе формул (15) и (19) нигде не было использовано условие $n' < n$, поэтому указанные формулы сохраняют силу и при $n' = n$. Геометрический смысл их при $n' = n$ таков: они оценивают сумму объемов трубок, получающихся при пересечении нормальных полос ранга n между собой.

4. Пусть теперь $\alpha = 0$. В этом разделе существенную роль будут играть условия $(b, n) = 1$, $(b', n') = 1$, $n' < n$.

Докажем, что

$$V(n;\, n';\, \alpha = 0) < c_9 n'^{s-1} \omega(n)\, \omega(n'). \tag{23}$$

Прежде всего из (10) аналогично (7) найдем

$$V(n,\, a_i,\, b;\, n' a_i',\, b';\, \alpha = 0) < c_2 \frac{\omega(n)}{n}, \tag{24}$$

так как объем общей части двух полос ранга n и n' не может быть больше объема одной из них.

Будем теперь рассматривать пересечение полос, порожденных семейством $P(n, a_i)$, с полосами семейства $P(n', a_i')$ при $\alpha = 0$, т. е. при условии

$$\frac{n}{n'} = \frac{a_2}{a_2'} = \ldots = \frac{a_s}{a_s'}, \tag{25}$$

для того, чтобы оценить число пересечений.

Чтобы полосы, порожденные параллельными плоскостями $P(n, a_i, b)$ и $P(n', a_i', b')$, пересеклись, необходимо, чтобы эти плоскости были достаточно близки одна к другой, а именно, необходимо, чтобы b и b' удовлетворяли неравенству

$$\left| \frac{b}{\sqrt{n^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2}} - \frac{b'}{\sqrt{n'^2 + a_2'^2 + \ldots + a_s'^2}} \right| <$$
$$< \frac{\omega(n)}{\sqrt{n^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2}} + \frac{\omega(n')}{\sqrt{n'^2 + a_2'^2 + \ldots + a_s'^2}},$$

откуда в силу (25) и (8′)

$$|n'b - nb'| < n'\omega(n) + n\omega(n') < 2n\omega(n')$$

или, если положить $(n, n') = d$, $n = n_1 d$, $n' = n_1' d$,

$$|n_1' b - n_1 b'| < 2n_1 \omega(n').$$

Решение этого неравенства в целых положительных b и b' при $(n, b) = 1$, $(n', b') = 1$ совпадает с решениями в таких же b и b' уравнений

$$n_1' b - n_1 b' = \pm k, \quad k = 1,\, 2, \ldots, [2n_1 \omega(n')] \tag{26}$$

(случай $k = 0$, очевидно, не может дать нужных нам решений, так как $n' \neq n$).

Так как нас интересуют лишь те плоскости $P(n, a_i, b)$ и $P(n', a_i', b')$, которые порождают полосы, то в силу (6) на b и b' накладываем дополнительные ограничения: $b < c_1 n$, $b' < c_1 n'$.

При изменении b от 1 до $c_1 n$ (c_1 можем считать целым), b пробежит $c_1 d$ раз полную систему вычетов по модулю n_1; n_1 и n_1' взаимно простые; следовательно, любое из уравнений (26) имеет не больше $c_1 d$ решений, а так как число уравнений есть $2[2n_1 \omega(n')]$, то общее число решений всех уравнений (26) не превосходит $4c_1 n \omega(n')$. Отсюда получаем

$$\nu(n,\, a_i;\, n',\, a_i';\, \alpha = 0) < 4c_1 n \omega(n'). \tag{27}$$

Оценим теперь число пар семейств $P(n, a_i)$, $P(n', a_i')$ при условии (25). Полагая опять $(n, n') = d$, найдем, что уравнение $n : n' = a : a'$ имеет d решений в целых положительных a и a', если $a \leqslant n$, $a' \leqslant n'$. Следовательно, система уравнений (25) имеет d^{s-1} решений в целых положительных $a_2, \ldots, a_s$. А так как $n' < n$, то $d \leqslant n'$ и число решений системы (25) или число пар $P(n, a_i)$, $P(n, a_i')$, удовлетворяющих условию $\alpha = 0$, не больше, чем n'^{s-1}. Отсюда и из (27)

$$\nu(n; n'; \alpha = 0) < 4c_1 n n'^{s-1} \omega(n').$$

Из этого неравенства и (24) вытекает (23).

5. Из (13), (15), (19) и (23) получаем (при $s \geqslant 2$ и $n' < n$)

$$ME'_{n,n'} < c_6 n^{s-1} n'^{s-1} \omega(n) \omega(n') + c_8 n'^{s} \omega(n) \omega(n') + + c_9 n'^{s-1} \omega(n) \omega(n') < c n^{s-1} n'^{s-1} \omega(n) \omega(n'). \quad (28)$$

6. Обозначим через E''_n множество точек, входящих более чем в одну из нормальных полос ранга n, и оценим ME''_n. Согласно замечанию, сделанному в конце раздела 3, $V\left(n; n; \alpha > \frac{1}{n}\right)$ и $V\left(n; n; 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\right)$ можно оценить по формулам (15) и (19) при $n' = n$. Параллельные же между собой полосы ранга n при достаточно большом n пересекаться не могут, так как в силу (8′) и (10) расстояние h между соседними параллельными нормальными плоскостями ранга n при достаточно большом n больше «толщины» полосы $2\delta_1$:

$$h \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2}} > \frac{2\omega(n)}{\sqrt{n^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2}}.$$

Следовательно, при достаточно большом n (и $s \geqslant 2$)

$$ME''_n \leqslant V\left(n; n; \alpha > \frac{1}{n}\right) + V\left(n; n; 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\right) < < c_6 \{n^{s-1}\omega(n)\}^2 + c_8 n^s \{\omega(n)\}^2 < c\{n^{s-1}\omega(n)\}^2. \quad (29)$$

II. Оценим теперь снизу меру множества E'_n. ME'_n есть сумма объемов нормальных полос ранга n за надлежащим вычетом перекрытий этих полос между собой. Заменим единичный куб меньшим кубом $W(\varepsilon \leqslant x_i \leqslant 1 - \varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, s$; $\varepsilon > 0$ достаточно малое число, которое будет выбрано ниже. Будем теперь учитывать из плоскостей (9) только те, которые пересекаются с W. Рассматривая область пересечения любой из этих плоскостей с единичным кубом, видим, что наименьшая из пересекающихся с W хорд этой области больше некоторого положительного числа, зависящего лишь от s и ε. Следовательно, объем полосы, порожденной любой из этих плоскостей, больше $2g\frac{\omega(n)}{n}$, где $g = g(s, \varepsilon) > 0$.

Возьмем семейство $P(n, a_i)$ параллельных между собой нормальных плоскостей и найдем нижнюю грань числа тех плоскостей этого семейства, которые пересекаются с W. Пусть временно параметр b в уравнении семейства $P(n, a_i)$ пробегает любые целые положительные значения, а не только взаимно простые с n. Обозначим новое семейство через $P'(n, a_i)$. Любая из плоскостей этого семейства, пересекаясь с единичным кубом, пересекается с его диагональю, проходящей через вершины $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$, так как все $a_i > 0$. Расстояние между двумя соседними плоскостями равно $\frac{1}{\sqrt{n^2+a_2^2+\ldots+a_s^2}}$, синус угла наклона плоскостей к диагонали равен $\frac{n+a_2+\ldots+a_s}{\sqrt{s}\sqrt{n^2+a_2^2+\ldots+a_s^2}}$, следовательно, внутри единичного куба пройдет не меньше, чем $n+a_2+\ldots+a_s$ плоскостей из $P'(n, a_i)$. По той же причине с отрезками диагонали, заключенными между точками $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ с одного конца и $(1-\varepsilon, 1-\varepsilon, \ldots, 1-\varepsilon)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$ с другого конца, пересечется не больше, чем $\frac{2\varepsilon}{\sqrt{s}}(n+a_2+\ldots+a_s)+2$ плоскостей из $P'(n, a_i)$. Таким образом, внутри куба W пройдет их не меньше, чем

$$\left(1-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{s}}\right)\left(n+a_2+\ldots+a_s\right)-2,$$

т. е. при достаточно малом ε, достаточно большом n и при дополнительном условии $a_2 > \frac{n}{2}$ — не меньше, чем n, причем этим плоскостям будут соответствовать значения b, пробегающие некоторый отрезок натурального ряда чисел.

Налагая опять на b ограничение $(n, b) = 1$, находим, что с W пересечется не меньше, чем $\varphi(n)$ плоскостей из $P(n, a_i)$, где $\varphi(n)$ функция Эйлера. Варьируя коэффициенты a_i $(i = 2, \ldots, s)$ в уравнении семейства $P(n, a_i)$ и учитывая нижнюю грань $2g\,\frac{\omega(n)}{n}$ объема полосы ранга n, получим

$$\mathrm{M}E'_n > gn^{s-2}\varphi(n)\,\omega(n) - c\left\{n^{s-1}\omega(n)\right\}^2, \tag{30}$$

где последний член, оценивающий сверху взаимные перекрытия полос ранга n, составлен по (29).

III. Обозначим через $F_{n,k}$ $(k > 0)$ множество точек, входящих в E'_{n+k} и не входящих ни в одно из множеств $E'_n, E'_{n+1}, \ldots, E'_{n+k-1}$. При $k = 0$ положим $F_{n,0} = E'_n$.

Заменив в (28) и (30) n через $n+k$ и n' через $n+i$ $(i < k)$, найдем

$$\mathrm{M}F_{n,k} > g(n+k)^{s-2}\varphi(n+k)\,\omega(n+k) - \\ - c\,(n+k)^{s-1}\omega(n+k)\sum_{i=0}^{k}(n+i)^{s-1}\omega(n+i). \tag{31}$$

Сделаем теперь решающий шаг в доказательстве, а именно покажем, что при любом достаточно большом n можно найти такое натуральное число N, что

$$\mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{N} E'_{n+k}\right\} > \gamma,$$

где γ — некоторая положительная константа.

Так как, по определению E'_n и $F_{n,k}$,

$$\mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{N} E'_{n+k}\right\} = \mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{N} F_{n,k}\right\} = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{M}\, F_{n,k},$$

то достаточно доказать неравенство

$$\sum_{k=0}^{N} \mathrm{M}\, F_{n,k} > \gamma.$$

В доказательстве будем пользоваться оценками [см. ([2]), стр. 708], относящимися к эйлеровой функции φ:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} = \frac{6}{\pi^2} n + O(\log^2 n), \tag{32}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi) k}{k} > \mu n, \tag{32'}$$

где μ — абсолютная положительная константа.

Положим для краткости $n^{s-1}\omega(n) = \eta(n)$ и определим натуральное число N неравенствами

$$\sum_{k=0}^{N} \eta(n+k) \leqslant \frac{g\mu}{2c} < \sum_{k=0}^{N+1} \eta(n+k),$$

что при достаточно большом n возможно, так как по (8) и (8′) интеграл

$$\int^{\infty} \eta(t)\, dt$$

расходится и $\eta(n)$ монотонно стремится к нулю.

Тогда при $k \leqslant N$ из (31)

$$\mathrm{M}\, F_{n,k} > g\eta(n+k)\frac{\varphi(n+k)}{n+k} - \frac{g\mu}{2}\eta(n+k).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{N} \mathrm{M}\, F_{n,k} > g\sum_{k=0}^{N} \eta(n+k)\frac{\varphi(n+k)}{n+k} - \frac{g^2\mu^2}{4c}.$$

Положив

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} = \sigma_n$$

и пользуясь (32′), находим

$$\sum_{k=0}^{N} \eta(n+k)\frac{\varphi(n+k)}{n+k} = \sum_{k=0}^{N} \sigma_{n+k}\{\eta(n+k)-\eta(n+k+1)\}+$$

$$+\sigma_{n+N}\eta(n+N+1)-\sigma_{n-1}\eta(n) >$$

$$>\mu\sum_{k=0}^{N}(n+k)\{\eta(n+k)-\eta(n+k+1)\}+$$

$$+\sigma_{n+N}\eta(n+N+1)-\sigma_{n-1}\eta(n) =$$

$$=\mu\sum_{k=0}^{N}\eta(n+k)+\mu(n-1)\eta(n)+\mu(n+N)\eta(n+N)+$$

$$+\sigma_{n+N}\eta(n+N+1)-\sigma_{n-1}\eta(n) >$$

$$>\mu\left\{\frac{g\mu}{2c}-\eta(n+N+1)\right\}+\mu(n-1)\eta(n)+$$

$$+\mu(n+N)\eta(n+N)+\sigma_{n+N}\eta(n+N+1)-\sigma_{n-1}\eta(n).$$

Применяя (32) и (8′), убедимся, что при всех n, начиная с некоторого,

$$\sum_{k=0}^{N}\eta(n+k)\frac{\varphi(n+k)}{n+k} > \frac{g\mu^2}{2c}-\frac{g\mu^2}{8c}=\frac{3g\mu^2}{8c}.$$

Следовательно, при достаточно большом n

$$\sum_{k=0}^{N} \mathrm{M} F_{n,k} > \frac{3g^2\mu^2}{8c}-\frac{g^2\mu^2}{4c}=\frac{g^2\mu^2}{8c}=\gamma.$$

IV. Из раздела III следует, что можно найти две бесконечные последовательности натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ и $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots$ так, что $n_{i+1} > n_i + N_i$ и

$$\mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{N_i} E'_{n_i+k}\right\} > \gamma.$$

Если теперь обозначим через E' множество точек s-мерного единичного куба, каждая из которых принадлежит бесконечному множеству членов последовательности $E'_1, E'_2, \ldots, E'_n, \ldots$, то в силу последнего неравенства $\mathrm{M}E' \geqslant \gamma$ Следовательно, по известной теореме, при любом $\beta > 0$ можно разбить единичный куб на такое число m^s равных частичных кубов, что по крайней мере в одном из них содержащаяся в нем часть множества E' будет иметь меру большую, чем $(1-\beta)\,m^s$. Обозначим этот куб через w.

Пусть $x(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ точка куба w, входящая в E'. По определению E', при $n \to \infty$ точка x бесконечное множество раз удовлетворяет условию (11), а тем самым условию

$$\left.\begin{array}{c} |a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_sx_sb| < \omega(n), \\ a_i,\ b \text{ — целые, } n=\max\{|a_1|,\ldots,|a_s|\}. \end{array}\right\} \quad (33)$$

Следовательно, при тех же a_i, b, т. е. бесконечное множество раз,

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s + b| < \psi(n), \tag{34}$$

так как по (8″) $\omega(n) < \psi(n)$.

В каждом из остальных $m^s - 1$ частичных кубов поставим точке x в соответствие конгруэнтную точку

$$x'(x_1', x_2', \ldots, x_s') \equiv x'\left(x_1 + \frac{r_1}{m},\ x_2 + \frac{r_2}{m},\ \ldots,\ x_s + \frac{r_s}{m}\right),$$

где r_i для каждого куба — вполне определенные целые числа. Покажем, что координаты любой точки x' также бесконечное множество раз удовлетворяют неравенству вида (34).

Пусть n выбрано так, что неравенство (33) выполняется (таких n найдется бесконечное множество).

Тогда

$$|a_1mx_1 + \ldots + a_smx_s + mb + a_1r_1 + \ldots + a_sr_s - a_1r_1 - \ldots - a_sr_s| < m\omega(n)$$

или

$$\left|a_1m\left(x_1 + \frac{r_1}{m}\right) + \ldots + a_sm\left(x_s + \frac{r_s}{m}\right) + b'\right| < m\omega(n), \tag{35}$$

где b' — целое число.

В силу монотонного убывания $t\psi(t)$

$$n\pi(n)\psi\{n\pi(n)\} < \frac{n}{m}\pi\left(\frac{n}{m}\right)\psi\left\{\frac{n}{m}\pi\left(\frac{n}{m}\right)\right\}$$

или, так как $\pi(n)$ монотонно возрастает и $\psi\{n\pi(n)\} = \omega(n)$,

$$m\omega(n) < \psi\left\{\frac{n}{m}\pi\left(\frac{n}{m}\right)\right\}.$$

При достаточно больших n

$$\frac{1}{m}\pi\left(\frac{n}{m}\right) > m \quad \text{и} \quad m\omega(n) < \psi(mn).$$

Таким образом при достаточно больших n из (35) получаем

$$|a_1'x_1' + \ldots + a_s'x_s' + b'| < \psi(n'),$$

где $a_i' = ma_i$, $n' = mn$.

Так как $n' = \max\{|a_1'|, \ldots, |a_s'|\}$ и последнее неравенство, имеющее вид (34), выполняется при бесконечном множестве значений n', то утверждение относительно x' доказано.

Итак, все точки E', входящие в w, а также все точки единичного куба, конгруэнтные последним, бесконечное множество раз удовлетворяют условию вида (34). Как легко видеть, мера множества этих точек больше $1 - \beta$, а так как число β произвольно мало, то теорема доказана.

Автор считает своим долгом выразить благодарность проф. А. Я. Хинчину, которому он обязан постановкой рассмотренной здесь задачи и ценными указаниями при ее разрешении.

Московский станкоинструментальный институт.

Поступило 6. III 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Khintchine A., Math. Ann., B. 92, 115, 1924.
[2] Khintchine A., Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, M. Z., B. 24, 706, 1926.

A. GROSCHEW. ZUR METRISCHEN THEORIE DER LINEARFORMEN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit enthält einen elementaren Beweis des folgenden Satzes: *Für* $t > 0$ *sei* $\psi(t)$ *stetig und positiv und genüge der Bedingung* $t^s \psi(t) \to 0 \, (t \to \infty)$, *wobei* $t^{s-1}\psi(t)$ *monoton abnehmen soll; damit dann die Ungleichung*

$$\left| \sum_{i=1}^{s} \theta_i a_i + b \right| < \psi(n), \quad n = \max \{ |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_s| \}$$

für fast alle Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *des s-dimensionalen Raumes unendlich viele Lösungen in ganzen* a_i, b *habe, ist die Divergenz des Integrals*

$$\int^{\infty} t^{s-1} \psi(t) \, dt$$

notwendig und hinreichend.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

К ЗАДАЧЕ О ПРИЛИВАХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАССЕЙНЕ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Статья дает некоторое обобщение двух работ Л. Релея, относящихся к вопросу о колебаниях жидкости в прямоугольном вращающемся бассейне.

§ 1

При обычных предположениях относительно приливных волн в бассейнах, когда считают волны длинными, пренебрегают вертикальными ускорениями и амплитуду колебаний частиц жидкости считают малой по сравнению с глубиной жидкости,—уравнения движения несжимаемой жидкости в бассейне постоянной глубины h, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, могут быть написаны в следующей форме*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}-2\omega v &= -g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta-\bar{\zeta}),\\ \frac{\partial v}{\partial t}+2\omega u &= -g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta-\bar{\zeta}),\\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь $\bar{\zeta}=-\frac{\Omega}{g}$, Ω—потенциал приливообразующей силы; ζ—возвышение уровня жидкости над плоскостью XOY; u, v—составляющие скорости частицы жидкости по осям OX и OY, вращающимся вокруг оси OZ с угловой скоростью ω; g — ускорение силы тяжести.

Мы будем рассматривать свободные колебания жидкости, т. е. будем считать $\bar{\zeta}=0$. Предположим, что u, v, ζ зависят от времени t следующим образом:

$$u=\operatorname{Re} Ue^{i\sigma t},\quad v=\operatorname{Re} Ve^{i\sigma t},\quad \zeta=\operatorname{Re} Ze^{i\sigma t}, \qquad (2)$$

* См. (1), стр. 373 и (2), стр. 236.

(Re—вещественная часть функции), где σ—постоянная частота колебаний, U, V, Z—комплексные функции координат x, y:

$$U = U_1 + iU_2, \quad V = V_1 + iV_2, \quad Z = Z_1 + iZ_2,$$

так что, например, ζ равняется в развернутом виде:

$$\zeta = Z_1 \cos \sigma t - Z_2 \sin \sigma t.$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1), причем знак Re писать не будем. Получим:

$$\left.\begin{aligned} i\sigma U - 2\omega V &= -g\frac{\partial Z}{\partial x}, \\ i\sigma V + 2\omega U &= -g\frac{\partial Z}{\partial y}, \\ i\sigma Z &= -h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из первых двух уравнений (3) найдем U и V, затем, подставив их в последнее из уравнений (3), получим уравнение для Z:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2}\left(i\sigma\frac{\partial Z}{\partial x} + 2\omega\frac{\partial Z}{\partial y}\right), \\ V &= \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2}\left(-2\omega\frac{\partial Z}{\partial x} + i\sigma\frac{\partial Z}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\Delta Z + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh} Z = 0, \quad \left(\Delta Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right). \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{gh}}, \quad \varepsilon = \frac{2\omega}{\sqrt{gh}}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) перепишем так:

$$\Delta Z + (\lambda^2 - \varepsilon^2) Z = 0. \tag{7}$$

На контуре L, ограничивающем область S, занятую жидкостью, мы должны иметь:

$$v_n = 0,$$

где v_n — нормальная составляющая скорости.

Заменяя в первой из формул (4) производные по x и по y соответственно производными по n (по нормали) и по s (по дуге), приходим к такому условию:

$$i\sigma\frac{\partial Z}{\partial n} + 2\omega\frac{\partial Z}{\partial s} = 0 \quad \text{на} \quad L,$$

Пользуясь обозначениями (6), это условие напишем в виде:

$$\lambda\frac{\partial Z}{\partial n} = i\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial s} \quad \text{на} \quad L. \tag{8}$$

Наша задача сводится к отысканию решений уравнения (7) при условии (8) и определению значений параметра λ, а тем самым и частот σ, при которых имеют место отличные от нуля решения. При этом мы ищем решения в виде рядов, расположен-

ных по степеням ε, т. е. решения, имеющие место лишь при достаточно малых значениях ε, а следовательно, и ω. Такую задачу рассматривал Л. Релей (L. Rayleigh) (3), (4). Наш метод является более естественным и приводит к более общим результатам.

§ 2

Положим,

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 + \ldots , \tag{9}$$

$$Z = Z_0 + Z_1\varepsilon + Z_2\varepsilon^2 + \ldots \tag{10}$$

Подставляя эти ряды в уравнения (7) и (8) и приравнивая между собою коэффициенты при ε^j в левых и правых частях этих уравнений, получим:

$$\Delta Z_j + \lambda_0^2 Z_j + 2\lambda_0\lambda_1 Z_{j-1} + (2\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1^2 - 1) Z_{j-2} + (2\lambda_0\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_2) Z_{j-3} + \ldots$$

$$\ldots + \left(2\lambda_0\lambda_j + 2\lambda_1\lambda_{j-1} + \ldots + \begin{cases} 2\lambda_{\frac{j-1}{2}}\lambda_{\frac{j+1}{2}} \text{ при } \lambda \text{ нечетном} \\ \lambda^2_{\frac{j}{2}} \text{ при } \lambda \text{ четном} \end{cases}\right) Z_0 = 0, \tag{11}$$

$$\lambda_j \frac{\partial Z_0}{\partial n} + \lambda_{j-1} \frac{\partial Z_1}{\partial n} + \ldots + \lambda_0 \frac{\partial Z_j}{\partial n} = i \frac{\partial Z_{j-1}}{\partial s}. \tag{12}$$

Полагая $j = 0$, получим:

$$\Delta Z_0 + \lambda_0^2 Z_0 = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial Z_0}{\partial n} = 0 \text{ на } L. \tag{14}$$

Мы видим, что Z_0 и λ_0^2 являются соответственно собственной функцией и собственным числом задачи о приливах без вращения, т. е. при $\varepsilon = 0$.

Предположим, что эта задача нами решена, т. е. что мы знаем все значения $\lambda_0^{(m)}$ и соответствующие им функции $Z_0^{(m)}$ для бассейна заданной формы, причем пусть функции $Z_0^{(m)}$ представляют ортогональную систему, нормированную так, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_S Z_0^{(m)} Z_0^{(n)}\, dS = 0 \qquad \text{при} \quad m \neq n, \\ &\int_S Z_0^{(m)2}\, dS = 1, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где интегрирование распространяется на площадь, занятую бассейном.

Для прямоугольника, как известно, характеристические числа имеют вид:

$$\lambda_0^{(m,n)^2} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), \tag{16}$$

где m и n могут принимать любые целые значения или нуль. Соответствующие фундаментальные функции, нормированные, как указано выше, таковы:

$$\left.\begin{aligned} Z_0^{(m,n)} &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \quad \text{при } m \neq 0 \text{ и } n \neq 0, \\ Z_0^{(m,0)} &= \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\frac{m\pi x}{a}, \quad Z_0^{(0,n)} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Характеристическому числу $\lambda_0^{(0,0)} = 0$ отвечает фундаментальная функция: $Z_0 = \frac{1}{ab}$. В случае прямоугольной области мы можем встретить как простые, так и кратные собственные значения. Так, например, если отношение квадратов сторон есть число иррациональное, то все $\lambda_0^{(m,n)}$ различны между собой. Наоборот, для квадрата, для которого

$$\lambda_0^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2)$$

существует бесчисленное множество пар значений (m, n) и (m', n') таких, что

$$\lambda_0^{(m,n)} = \lambda_0^{(m',n')}.$$

Например, так как $3^2 + 4^2 = 4^2 + 3^2 = 0^2 + 5^2 = 5^2 + 0^2$, то имеем

$$\lambda_0^{(3,4)^2} = \lambda_0^{(4,3)^2} = \lambda_0^{(0,5)^2} = \lambda_0^{(5,0)^2} = \frac{25\pi^2}{a^2}.$$

Или, иначе, собственному значению

$$\lambda_0^2 = \frac{25\pi^2}{a^2}$$

соответствуют четыре собственных функции:

$$\frac{2}{a}\cos\frac{3\pi x}{a}\cos\frac{4\pi y}{a}, \quad \frac{2}{a}\cos\frac{4\pi x}{a}\cos\frac{3\pi y}{a}, \quad \frac{\sqrt{2}}{a}\cos\frac{5\pi x}{a}, \quad \frac{\sqrt{2}}{a}\cos\frac{5\pi y}{a}.$$

Вообще, если $m \neq n$, то для квадрата имеем по крайней мере двукратное характеристическое число (так как $m^2 + n^2 = n^2 + m^2$).

§ 3

Обратимся прежде всего к случаю, когда λ_0 является простым собственным числом. Тогда за Z_0 примем указанное выше нормированное значение собственной функции (17). Для $j = 1$ на основании (11) и (12) будем иметь:

$$\Delta Z_1 + \lambda_0^2 Z_1 + 2\lambda_1\lambda_0 Z_0 = 0 \quad \text{в} \quad S, \tag{18}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial Z_1}{\partial n} = i\frac{\partial Z_0}{\partial s} \quad \text{на } L. \tag{19}$$

Умножим все члены (18) на $Z_0 dS$ и проинтегрируем по всей площади S. Заменив $\lambda_0^2 Z_0$ на $-\Delta Z_0$ на основании уравнения (13), получим:

$$\iint_S (Z_0\Delta Z_1 - Z_1\Delta Z_0)\, dS + 2\lambda_1\lambda_0 \iint_S Z_0^2\, dS = 0.$$

Применяя формулу Грина к первому интегралу последнего равенства, будем иметь:

$$\int\limits_L \left(Z_0 \frac{\partial Z_1}{\partial n} - Z_1 \frac{\partial Z_0}{\partial n}\right) ds + 2\lambda_0\lambda_1 \iint\limits_S Z_0^2\, dS = 0.$$

Но $\frac{\partial Z_0}{\partial n} = 0$ и $\frac{\partial Z_1}{\partial n} = \frac{i}{\lambda_0} \frac{\partial Z_0}{\partial s}$ на L, поэтому последнее равенство приводится к такому:

$$\frac{i}{\lambda_0} \int\limits_L Z_0 \frac{\partial Z_0}{\partial s} ds + 2\lambda_1\lambda_0 \iint\limits_S Z_0^2\, dS = 0. \tag{20}$$

Контурный интеграл, очевидно, равен нулю, а интеграл по площади S, на основании (15), равен единице, поэтому получаем:

$$\lambda_1 = 0. \tag{21}$$

После этого будем иметь для Z_1 уравнение

$$\Delta Z_1 + \lambda_0^2 Z_1 = 0 \tag{22}$$

и контурное условие

$$\frac{\partial Z_1}{\partial n} = \frac{i}{\lambda_0} \frac{\partial Z_0}{\partial s}. \tag{23}$$

Между прочим, из (23) вытекает, что

$$\int\limits_L \frac{\partial Z_1}{\partial n} ds = 0,$$

а так как

$$\iint\limits_S \Delta Z_1\, dS = \int\limits_L \frac{\partial Z_1}{\partial n} ds = 0,$$

то на основании (22)

$$\iint\limits_S Z_1\, dS = 0,$$

т. е. среднее значение части возвышения Z_1 равно нулю.

Чтобы найти решение (22) при условии (23), положим

$$Z_1 = Z_1' + Z_1'',$$

где Z_1' пусть будет решение уравнения

$$\Delta Z_1' = 0 \tag{24}$$

при условии

$$\frac{\partial Z_1'}{\partial n} = \frac{i}{\lambda_0} \frac{\partial Z_0}{\partial s} \quad \text{на } L, \tag{25}$$

Z_1'' — решение уравнения

$$\Delta Z_1'' + \lambda_0^2 Z_1'' = -\lambda_0^2 Z_1', \tag{26}$$

причем

$$\frac{\partial Z_1''}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad L. \tag{27}$$

Z_1', как решение задачи Неймана, определяется (с точностью до постоянной) единственным образом при определенном выборе Z_0; Z_1'' определяется с точностью до слагаемого вида

$$C_1 Z_0,$$

где C_1—произвольная постоянная. Если Z_1''—некоторое частное решение уравнения (26) при граничном условии (27), то общее решение Z_1, которое будем обозначать через $\tilde{Z}_1$, имеет вид:

$$\tilde{Z}_1 = Z_1' + Z_1'' + C_1 Z_0. \tag{28}$$

Чтобы найти гармоническую в области S функцию Z_1', мы можем применить метод Грина, воспользовавшись функцией Неймана, т. е. функцией

$$N(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \lg r + N_1(x, y; \xi, \eta),$$

где (ξ, η)—координаты произвольно взятой точки в области S, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, $N_1(x, y; \xi, \eta)$ — гармоническая функция относительно (x, y) в области S; вследствие симметричности N_1 относительно пар аргументов (x, y) и (ξ, η) она гармонична также относительно переменных (ξ, η). На контуре L функция Неймана удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial N}{\partial n} = -\frac{2}{l},$$

где l — длина дуги кривой L. Тогда, как известно, Z_1' может быть определено по формуле:

$$Z_1'(x, y) = \int_L N(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial Z_1'}{\partial n} ds = \frac{i}{\lambda_0} \int_L N(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial Z_0}{\partial s} ds. \tag{29}$$

Предположим теперь, что $Z_1'(x, y)$ разлагается в ряд по функциям $Z_0^{(r,s)}$:

$$Z_1'(x, y) = \sum_{r,s} a_{rs} Z_0^{(r,s)}(x, y),$$

где

$$a_{rs} = \iint_S Z_1' Z_0^{(r,s)} dS.$$

Покажем, что a_{mn}—коэффициент при $Z_0 = Z_0^{(m,n)}$—равен нулю. Действительно,

$$a_{mn} = \iint_S Z_1' Z_0 dS = -\frac{1}{\lambda_0^2} \iint_S Z_1' \Delta Z_0 dS = -\frac{1}{\lambda_0^2} \iint_S (Z_1' \Delta Z_0 - Z_0 \Delta Z_1') dS$$

(так как $\Delta Z_1' = 0$).

Применяя формулу Грина, имеем:

$$a_{mn} = -\frac{1}{\lambda_0^2} \int_L \left(Z_1' \frac{\partial Z_0}{\partial n} - Z_0 \frac{\partial Z_1'}{\partial n} \right) ds = \frac{i}{\lambda_0^3} \int_L Z_0 \frac{\partial Z_0}{\partial s} ds = 0.$$

Для того чтобы найти Z_1'', подставим ряд Z_1' в правую часть уравнения (26):

$$\Delta Z_1'' + \lambda_0^2 Z_1'' = -\lambda_0^3 \sum_{r,s}{}' a_{rs} Z_0^{(r,s)}(x, y) \tag{30}$$

(штрих у знака $\sum$ означает, что ряд не содержит члена с Z_0).

Ищем Z_1'' в виде ряда

$$Z_1'' = \sum_{r,s} A_{rs} Z_0^{(r,s)}.$$

Подстановка его в уравнение (30) и сравнение коэффициентов при $Z_0^{(r,s)}$ показывает, что

$$A_{rs} = \frac{\lambda_0^2 a_{rs}}{\lambda_{rs}^2 - \lambda_0^2},$$

а тогда для $Z_1 = Z_1' + Z_1''$ получим:

$$Z_1 = \sum_{r,s}{}' \frac{\lambda_{rs}^2 a_{rs}}{\lambda_{rs}^2 - \lambda_0^2} Z_0^{(r,s)}(x, y). \tag{31}$$

Общее решение уравнения (22) при условии (23), согласно сказанному выше, имеет вид:

$$\tilde{Z}_1 = \sum_{r,s}{}' \frac{\lambda_{rs}^2 a_{rs} Z_0^{(r,s)}(x, y)}{\lambda_{rs}^2 - \lambda_0^2} + C_1 Z_0(x, y). \tag{32}$$

Предположим теперь, что мы нашли коэффициенты рядов (9) и (10) до λ_{j-1} и Z_{j-1} включительно, причем $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{j-1}$ ортогональны Z_0, и будем определять λ_j и Z_j. Для Z_j имеем неоднородное уравнение

$$\Delta Z_j + \lambda_0^2 Z_j = F_j(x, y), \tag{33}$$

где

$$F_j = -2\lambda_0\lambda_1 Z_{j-1} - (2\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1^2 - 1) Z_{j-2} - \\ - \ldots - (2\lambda_0\lambda_j + 2\lambda_1\lambda_{j-1} + \ldots) Z_0 \tag{34}$$

при контурном условии

$$\frac{\partial Z_j}{\partial n} = f_j(s) \quad \text{на} \quad L; \tag{35}$$

через $f_j(s)$ обозначена известная (после того как определены Z_k и λ_k до $k = j-1$ включительно) функция:

$$f_j(s) = \left[\frac{i}{\lambda_0}\frac{\partial Z_{j-1}}{\partial s} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\frac{\partial Z_{j-1}}{\partial n} - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\frac{\partial Z_{j-2}}{\partial n} - \ldots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_0}\frac{\partial Z_1}{\partial n}\right] \text{ на } L. \tag{36}$$

Умножим (33) почленно на Z_0 и проинтегрируем по площади S, причем в первом интеграле заменим Z_0 на $-\frac{\Delta Z_0}{\lambda_0^2}$:

$$\iint_S (Z_0 \Delta Z_j - Z_j \Delta Z_0)\, dS = \iint_S F_j(x, y) Z_0\, dS.$$

Вследствие предположенной ортогональности $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{j-1}$ функции Z_0, в правой части останется отличным от нуля лишь последний член суммы (34). Применяя к левой части последнего равенства формулу Грина, найдем:

$$\int_L \left(Z_0 \frac{\partial Z_j}{\partial n} - Z_j \frac{\partial Z_0}{\partial n}\right) ds = -(2\lambda_0\lambda_j + 2\lambda_1\lambda_{j-1} + \ldots) \iint_S Z_0^2\, dS, \tag{37}$$

или

$$\int_L Z_0 f_j(s)\,ds + 2\lambda_0\lambda_j + 2\lambda_1\lambda_{j-1} +$$

$$+\ldots+\left\{\begin{array}{l} 2\lambda_{\frac{j-1}{2}}\lambda_{\frac{j+1}{2}} \text{ при } j \text{ нечетном} \\ \lambda^2_{\frac{j}{2}} \text{ при } j \text{ четном} \end{array}\right\} = 0. \tag{38}$$

Из этого равенства найдем λ_j.

Теперь, для вычисления Z_j, положим

$$Z_j = Z'_j + Z''_j,$$

причем

$$\Delta Z'_j = 0 \text{ в } S, \quad \frac{\partial Z'_j}{\partial n} = f_j(s) \text{ на } L$$

и

$$\Delta Z''_j + \lambda_0^2 Z''_j = F_j(x, y) - \lambda_0^2 Z'_j \text{ в } S, \tag{39}$$

$$\frac{\partial Z''_j}{\partial n} = 0 \text{ на } L.$$

Найдем Z'_j хотя бы с помощью функции Неймана. Решение Z'_j определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое пропадает при вычислении Z_j. Предположим, что Z'_j можно разложить в ряд по фундаментальным функциям $Z_0^{(r,s)}$:

$$Z'_j = \sum_{r,s} a_{rs}^{(j)} Z_0^{(r,s)}. \tag{40}$$

Вычислим коэффициент при $Z_0^{(m,n)} = Z_0$:

$$a_{mn}^{(j)} = \iint_S Z'_j Z_0\,dS = -\frac{1}{\lambda_0^2}\iint_S Z'_j \Delta Z_0\,dS =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_0^2}\iint_S (Z'_j\Delta Z_0 - Z_0\Delta Z'_j)\,dS = -\frac{1}{\lambda_0^2}\int_L \left(Z'_j\frac{\partial Z_0}{\partial n} - Z_0\frac{\partial Z'_j}{\partial n}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0^2}\int_L Z_0 f_j(s)\,ds.$$

Подставим ряд (40) в уравнение (39). Нетрудно видеть, что коэффициент при Z_0 в правой части этого уравнения обращается в нуль, так как он равен со знаком минус левой части равенства (38). А так как правая часть (39) не содержит Z_0, то существует решение Z''_j, которое можем искать в виде ряда по фундаментальным функциям:

$$Z''_j = \sum_{r,s} B_{rs} Z_0^{(r,s)}.$$

Пусть

$$F_j(x, y) - \lambda_0^2 Z'_j = \sum_{r,s}{}' b_{rs} Z_0^{(r,s)}.$$

Теперь будем иметь:

$$B_{rs} = \frac{\lambda_0^2 b_{rs}}{\lambda_{rs}^2 - \lambda_0^2}$$

и

$$Z_j = Z_j' + Z_j'' = \sum_{r,s} a_{rs}^{(j)} Z_0^{(r,s)} + \lambda_0^2 \sum_{r,s}{}' \frac{b_{rs} Z_0^{(r,s)}}{\lambda_{rs}^2 - \lambda_0^2}. \qquad (41)$$

Формула (41) представляет частное решение уравнения (33).

Общее решение содержит еще слагаемое $C_j Z_0$, где C_j — произвольная постоянная. Обозначим через $\tilde{Z}_j$ общее решение (33).

Нетрудно проверить, что если мы возьмем для Z в формуле (10) два выражения

$$Z = Z_0 + Z_1\varepsilon + Z_2\varepsilon^2 + \ldots$$

и

$$\tilde{Z} = Z_0 + \tilde{Z}_1\varepsilon + \tilde{Z}_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

то эти выражения будут отличаться друг от друга лишь общим множителем, не зависящим от x и y, а зависящим лишь от ε, а именно, множителем

$$1 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \ldots$$

Далее очевидно, что коэффициенты λ_j не зависят от того, какие значения Z_j мы выбираем.

При вычислении коэффициентов рядов (9) и (10) мы исходили из значения $\lambda = +\lambda_0$ при $\varepsilon = 0$. С таким же правом мы могли бы исходить из условия: $\lambda = -\lambda_0$ при $\varepsilon = 0$. Тогда мы получили бы такие ряды:

$$\lambda' = -\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon - \lambda_2\varepsilon^2 + \lambda_3\varepsilon^3 - \ldots, \qquad (42)$$

$$Z' = Z_0 - Z_1\varepsilon + Z_2\varepsilon^2 - Z_3\varepsilon^3 + \ldots, \qquad (43)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, Z_0, Z_1, \ldots$ имеют определенные выше значения. В этом можно убедиться непосредственно, если проследить весь процесс вычислений. Но можно это проверить, исходя из следующих соображений: если в уравнении (7) заменить λ на $-\lambda$ и ε на $-\varepsilon$, то уравнение не изменится. Граничное условие (8) также не изменится, если одновременно заменить λ на $-\lambda$ и ε на $-\varepsilon$. Следовательно, если мы нашли некоторое значение λ и некоторую функцию Z, удовлетворяющие (7) и (8):

$$\lambda = \varphi(\varepsilon), \quad Z = F(x, y; \varepsilon),$$

то

$$\lambda' = -\varphi(-\varepsilon) \text{ и } Z' = F(x, y; -\varepsilon)$$

также будут удовлетворять (7) и (8). А это как раз и даст нам ряды (42) и (43).

Далее, из способа вычисления коэффициентов $Z_1, Z_2, \ldots$ следует, что если принять для Z_0 вещественное выражение, то $Z_2, Z_4, \ldots$ будут вещественными, а $Z_1, Z_3, \ldots$ чисто мнимыми. Следовательно

$$Z' = \bar{Z}.$$

Отсюда нетрудно притти к заключению, что если λ вещественно, то $\lambda' = -\lambda$. Действительно, если уравнения (7) и (8) заменить им сопряженными, то λ придется заменить на $-\lambda$. А это значит, что в случае вещественного λ ряды (10) и (42) содержат только четные степени ε *.

§ 4

Рассмотрим теперь случай прямоугольного бассейна со сторонами $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Обобщенная функция Неймана для прямоугольника может быть представлена в виде такого тригонометрического ряда **:

$$N'(x, y;\ \xi, \eta) = \sum_{r,s} \frac{Z_0^{(r,s)}(x, y)\, Z_0^{(r,s)}(\xi, \eta)}{\lambda_{rs}^2} =$$

$$= \frac{4}{ab\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b} \cos\frac{r\pi\xi}{a} \cos\frac{s\pi\eta}{b}}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}} +$$

$$+ \frac{2a}{b\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{r\pi\xi}{a}}{r^2} + \frac{2b}{a\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{s\pi y}{b} \cos\frac{s\pi\eta}{b}}{s^2}.$$

Положим

$$Z_0 = Z_0^{(m,n)} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Тогда по формуле (29)

$$Z_1'(x, y) = \frac{i}{\lambda_0} \int_L N'(x, y;\ s) \frac{\partial Z_0}{\partial s}\, ds =$$

$$= \frac{2i}{\lambda_0 \sqrt{ab}} \left\{ \frac{4}{ab\pi^2} \sum_r \sum_s \frac{\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b}}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}} \int_L \cos\frac{r\pi\xi}{a} \cos\frac{s\pi\eta}{b} \frac{\partial}{\partial s}\left(\cos\frac{m\pi\xi}{a} \cos\frac{n\pi\eta}{b}\right) ds + \right.$$

$$+ \frac{2a}{b\pi^2} \sum_r \frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{r^2} \int_L \cos\frac{r\pi\xi}{a} \frac{\partial}{\partial s} \left(\cos\frac{m\pi\xi}{a} \cos\frac{n\pi\eta}{b}\right) ds +$$

$$\left. + \frac{2b}{a\pi^2} \sum_s \frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{s^2} \int_L \cos\frac{s\pi\eta}{b} \frac{\partial}{\partial s} \left(\cos\frac{m\pi\xi}{a} \cos\frac{n\pi\eta}{b}\right) ds \right\}.$$

* В подготовленной автором к печати работе «Об интегральном уравнении теории приливов» доказано, что при вещественных значениях ε характеристические значения λ также вещественны. В этой же работе доказано, что ряды (9) и (10) сходятся при достаточно малых значениях ε.

** Функция $N'(x, y;\ \xi, \eta)$ отличается от функции Неймана $N(x, y;\ \xi, \eta)$ § 3 тем, что удовлетворяет неоднородному уравнению $\Delta N' = \frac{1}{ab}$ и однородному граничному условию $\frac{\partial N'}{\partial n} = 0$. При решении нашей задачи она может быть взята вместо функции $N(x, y;\ \xi, \eta)$.

Вычисления приводят к таким значениям интегралов:

$$I = \int\limits_L \cos\frac{r\pi\xi}{a}\cos\frac{s\pi\eta}{b}\frac{\partial}{\partial s}\left(\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{n\pi\eta}{b}\right)ds =$$

$$= \left[1-(-1)^{m+r}\right]\left[1-(-1)^{n+s}\right]\left(\frac{m^2}{r^2-m^2}-\frac{n^2}{s^2-n^2}\right)=$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4m^2}{r^2-m^2}-\dfrac{4n^2}{s^2-n^2}, & \text{если } m+r \text{ и } n+s \text{ нечетные,} \\ 0, & \text{если } m+r \text{ или } n+s \text{ четное;} \end{cases}$$

$$I_1 = \int\limits_L \cos\frac{r\pi\xi}{a}\frac{\partial}{\partial s}\left(\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{n\pi\eta}{b}\right)ds =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4r^2}{r^2-m^2}, & \text{если } n \text{ и } m+r \text{ нечетные,} \\ 0, & \text{если } n \text{ или } m+r \text{ четное;} \end{cases}$$

$$I_2 = \int\limits_L \cos\frac{s\pi\eta}{b}\frac{\partial}{\partial s}\left(\cos\frac{m\pi\xi}{a}\cos\frac{n\pi\eta}{b}\right)ds =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4s^2}{s^2-n^2}, & \text{если } m \text{ и } n+s \text{ нечетные,} \\ 0, & \text{если } m \text{ или } n+s \text{ четное.} \end{cases}$$

Поэтому для Z_1' получаем

$$Z_1' = \frac{2i}{\lambda_0\sqrt{ab}}\left\{\frac{16}{ab\pi^2}\sum_r\sum_s\left(\frac{m^2}{r^2-m^2}-\frac{n^2}{s^2-n^2}\right)\frac{\cos\dfrac{r\pi x}{a}\cos\dfrac{s\pi y}{b}}{\dfrac{r^2}{a^2}+\dfrac{s^2}{b^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{8a\varepsilon_1}{b\pi^2}\sum_r\frac{\cos\dfrac{r\pi x}{a}}{r^2-m^2}-\frac{8b\varepsilon_2}{a\pi^2}\sum_s\frac{\cos\dfrac{s\pi y}{b}}{s^2-n^2}\right\}.$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, \text{ если } n \text{ нечетное,} \\ 0, \text{ если } n \text{ четное;} \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } m \text{ нечетном,} \\ 0 \text{ при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

Значки суммирования r и s таковы, что $r+m$ из $s+n$ являются нечетными числами.

Формула (31) показывает, что для получения Z_1 из Z_1' коэффициенты при $Z_0^{(r,s)}$ в последнем нужно умножить на $\dfrac{\lambda_{rs}^2}{\lambda_{rs}^2-\lambda_0^2}$. Таким образом получим:

$$Z_1 = \frac{16i}{\lambda_0\pi^2\sqrt{a^3b^3}}\left\{2\sum_r\sum_s\left(\frac{m^2}{r^2-m^2}-\frac{n^2}{s^2-n^2}\right)\frac{\cos\dfrac{r\pi x}{a}\cos\dfrac{s\pi y}{b}}{\dfrac{r^2}{a^2}+\dfrac{s^2}{b^2}-\bar\lambda_0^2}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_1\sum_r\frac{r^2\cos\dfrac{r\pi x}{a}}{(r^2-m^2)\left(\dfrac{r^2}{a^2}-\bar\lambda_0^2\right)}-\varepsilon_2\sum_s\frac{s^2\cos\dfrac{s\pi y}{b}}{(s^2-n^2)\left(\dfrac{s^2}{b^2}-\bar\lambda_0^2\right)}\right\}, \quad (44)$$

где

$$\bar\lambda_0^2 = \frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2} = \frac{\lambda_0^2}{\pi^2}.$$

Преобразуем коэффициенты ряда для Z_1 с помощью разложения дробей на простейшие. Коэффициент при $\cos\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{b}$ может быть представлен в следующей форме:

$$\left(\frac{m^2}{r^2-m^2}-\frac{n^2}{s^2-n^2}\right)\frac{1}{\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}=\frac{b^2m^2}{(r^2-m^2)(s^2-n^2)}-$$

$$-\frac{b^2\bar{\lambda}_0^2}{(s^2-n^2)\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}=-\frac{a^2n^2}{(r^2-m^2)(s^2-n^2)}+\frac{a^2\bar{\lambda}_0^2}{(r^2-m^2)\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}.$$

Коэффициент при $\cos\frac{r\pi x}{a}$:

$$\frac{r^2}{(r^2-m^2)\left(\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}=-\frac{b^2m^2}{n^2(r^2-m^2)}+\frac{b^2\bar{\lambda}_0^2}{n^2\left(\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}.$$

Коэффициент при $\cos\frac{s\pi y}{b}$:

$$-\frac{s^2}{(s^2-n^2)\left(\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}=\frac{a^2n^2}{m^2(s^2-n^2)}-\frac{a^2\bar{\lambda}_0^2}{m^2\left(\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}.$$

Поэтому Z_1 можно написать в одном из следующих двух видов:

$$Z_1=\frac{32i}{\lambda_0\pi^2ab\sqrt{ab}}\left\{b^2m^2\sum_r\frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{m^2-r^2}\sum_s\frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{n^2-s^2}+\right.$$

$$+b^2\bar{\lambda}_0^2\sum_s\frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{n^2-s^2}\sum_r\frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}+$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_1}{2}\sum_r\frac{r^2\cos\frac{r\pi x}{a}}{(r^2-m^2)\left(\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}-\frac{\varepsilon_2}{2}\sum_s\frac{s^2\cos\frac{s\pi y}{b}}{(s^2-n^2)\left(\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}\right\}=$$

$$=\frac{32i}{\lambda_0\pi^2ab\sqrt{ab}}\left\{-a^2n^2\sum_r\frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{m^2-r^2}\sum_s\frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{n^2-s^2}-\right.$$

$$-a^2\bar{\lambda}_0^2\sum_r\frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{m^2-r^2}\sum_s\frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}+$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_1}{2}\sum_r\frac{r^2\cos\frac{r\pi x}{a}}{(r^2-m^2)\left(\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}-\frac{\varepsilon_2}{2}\sum_s\frac{s^2\cos\frac{s\pi y}{b}}{(s_2-n^2)\left(\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}\right\}.$$

Воспользуемся формулами:

$$\sum_{(r+m\text{ неч.})} \frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{m^2-r^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{4m}\sin\frac{m\pi x}{a} & \text{при } m \text{ четном} \\ \frac{\pi}{4m}\sin\frac{m\pi x}{a} - \frac{1}{2m^2} & \text{при } m \text{ нечетном } (0 \leqslant x \leqslant a) \end{cases}$$

$$\sum_{(r\text{ четн.})} \frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{\frac{r^2}{a^2}+\alpha^2} = \frac{\pi a}{4\alpha}\,\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{\pi a\alpha}{2}} - \frac{1}{2\alpha^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

$$\sum_{(r\text{ неч.})} \frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{\frac{r^2}{a^2}+\alpha^2} = -\frac{\pi a}{4\alpha}\,\frac{\operatorname{sh}\pi\alpha\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\alpha\pi a}{2}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Рассмотрим отдельно четыре случая:

1) m и n четные; следовательно, r и s могут принимать лишь нечетные значения. Тогда

$$Z_1 = \frac{2i}{\lambda_0\sqrt{ab}}\,\frac{mb}{na}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} +$$

$$+\frac{8i\lambda_0}{\pi^3}\sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{(s\text{ неч.})}\frac{\operatorname{sh}\pi\sqrt{\frac{b^2}{s^2}-\bar{\lambda}_0^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)\cos\frac{s\pi y}{b}}{(s^2-n^2)\sqrt{\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}\operatorname{ch}\frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}} =$$

$$= -\frac{2i}{\lambda_0\sqrt{ab}}\,\frac{na}{mb}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} -$$

$$-\frac{8i\lambda_0}{\pi^3}\sqrt{\frac{a}{b}}\sum_{(r\text{ неч.})}\frac{\operatorname{sh}\pi\sqrt{\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2}\left(y-\frac{b}{2}\right)\cos\frac{r\pi x}{a}}{(r^2-m^2)\sqrt{\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2}\operatorname{ch}\frac{\pi b}{2}\sqrt{\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2}}. \qquad (45)$$

2) m и n нечетные; тогда r и s принимают только четные значения. Имеем:

$$Z_1 = \frac{2i}{\lambda_0\sqrt{ab}}\,\frac{mb}{na}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} +$$

$$+\frac{8i\lambda_0}{\pi^3}\sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{s}\frac{\operatorname{ch}\pi\sqrt{\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)\cos\frac{s\pi y}{b}}{\sqrt{\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}\,(n^2-s^2)\operatorname{sh}\frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}} +$$

$$+\frac{4i}{\pi^2 n^2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{\cos\lambda_0\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\sin\frac{\lambda_0 a}{2}} = \frac{2i}{\lambda_0\sqrt{ab}}\,\frac{na}{mb}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} -$$

$$-\frac{8i\lambda_0}{\pi^3}\sqrt{\frac{a}{b}}\sum_{r}\frac{\operatorname{ch}\pi\sqrt{\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2}\left(y-\frac{b}{2}\right)\cos\frac{r\pi x}{a}}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2}\,(m^2-r^2)\operatorname{sh}\frac{\pi b}{2}\sqrt{\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2}} -$$

$$-\frac{4i}{\pi^2 m^2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{\cos\lambda_0\left(y-\frac{b}{2}\right)}{\sin\frac{\lambda_0 b}{2}}. \qquad (46)$$

3) m четное, n нечетное; тогда r должно принимать нечетные, s—четные значения:

$$Z_1 = \frac{2i}{\lambda_0 \sqrt{ab}} \frac{bm}{an} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} -$$

$$- \frac{8i\lambda_0}{\pi^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \sum_s \frac{\operatorname{sh} \pi \sqrt{\frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2} \left(x - \frac{a}{2}\right) \cos \frac{s\pi y}{b}}{\sqrt{\frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2}\, (n^2 - s^2) \operatorname{ch} \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2}} -$$

$$- \frac{4i}{\pi^2 n^2} \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{\sin \lambda_0 \left(x - \frac{a}{2}\right)}{\cos \frac{a\lambda_0}{2}} = - \frac{2i}{\lambda_0 \sqrt{ab}} \frac{an}{bm} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} -$$

$$- \frac{8i\lambda_0}{\pi^3} \sqrt{\frac{a}{b}} \sum_r \frac{\operatorname{ch} \pi \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2} \left(y - \frac{b}{2}\right) \cos \frac{r\pi x}{a}}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2}\, (m^2 - r^2) \operatorname{sh} \frac{\pi b}{2} \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - \lambda_0^2}}. \qquad (47)$$

4) m нечетное, n четное; тогда все r будут четные, s—нечетные:

$$Z_1 = \frac{2i}{\lambda_0 \sqrt{ab}} \frac{mb}{na} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{8i\lambda_0}{\pi^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \sum_s \frac{\operatorname{ch} \pi \sqrt{\frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2} \left(x - \frac{a}{2}\right) \cos \frac{s\pi y}{b}}{\sqrt{\frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2}\, (n^2 - s^2) \operatorname{sh} \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2}} =$$

$$= - \frac{2i}{\lambda_0 \sqrt{ab}} \frac{na}{mb} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{8i\lambda_0}{\pi^3} \sqrt{\frac{a}{b}} \sum_r \frac{\operatorname{sh} \pi \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2} \left(y - \frac{b}{2}\right) \cos \frac{r\pi x}{a}}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2}\, (m^2 - r^2) \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2} \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2}} -$$

$$- \frac{4i}{\pi^2 m^2} \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\sin \lambda_0 \left(y - \frac{b}{2}\right)}{\cos \frac{b\bar{\lambda}_0}{2}}. \qquad (48)$$

Нетрудно видеть, что полученные простые ряды для Z_1 сходятся абсолютно и равномерно в области прямоугольника, что отдельные слагаемые этих рядов суть частные решения уравнения

$$\Delta Z + \lambda_0^2 Z = 0$$

и что функция, определяемая полученными равенствами, удовлетворяет контурным условиям. При этом, чтобы проверить выполнение контурных условий на сторонах $y = 0$ и $y = b$, следует взять в каждом из четырех случаев первое выражение для Z_1, для сторон же $x = 0$ и $x = a$ следует брать второе выражение.

После того как найдено Z_1, мы можем вычислить λ_2, пользуясь формулой:

$$\lambda_2 = \frac{1 - \alpha}{2\lambda_0},$$

где

$$\alpha = \frac{i}{\lambda_0}\int\limits_L Z_0 \frac{\partial Z_1}{\partial s}\, ds.$$

Здесь удобно воспользоваться двойным рядом для Z_1. Получим:

$$\alpha = \frac{256}{\lambda_0^2\pi^2 a^2 b^2}\sum_{r,s}\frac{(n^2r^2 - m^2s^2)^2}{(m^2-r^2)^2(n^2-s^2)^2\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar\lambda_0^2\right)} -$$

$$- \frac{128\varepsilon_1}{\lambda_0^2 a^2 b^2}\sum\frac{r^4}{(r^2-m^2)^2\left(\lambda_0^2-\frac{r^2\pi^2}{a^2}\right)} - \frac{128\varepsilon_2}{\lambda_0^2 a^2 b^2}\sum\frac{s^4}{(s^2-n^2)^2\left(\lambda_0^2-\frac{s^2\pi^2}{b^2}\right)}.$$

Следовательно,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\lambda_0} + \frac{128}{\lambda_0^3 a^2 b^2}\sum\frac{(m^2s^2-n^2s^2)^2}{(r^2-m^2)^2(s^2-n^2)^2\left(\lambda_0^2-\frac{r^2\pi^2}{a^2}-\frac{s^2\pi^2}{b^2}\right)} +$$

$$+ \frac{64\varepsilon_1}{\lambda_0^3 a^2 b^2}\sum\frac{r^4}{(r^2-m^2)^2\left(\lambda_0^2-\frac{r^2\pi^2}{a^2}\right)} + \frac{64\varepsilon_2}{\lambda_0^3 a^2 b^2}\sum\frac{s^4}{(s^2-n^2)^2\left(\lambda_0^2-\frac{s^2\pi^2}{b^2}\right)}. \qquad (49)$$

σ с точностью до члена ω^2 имеет вид [см. формулы (6)]:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{4\lambda_2}{gh}\omega^2 + \ldots$$

Приведем результаты вычислений Z_1 и λ_2 для случаев, когда m или $n = 0$. Именно, пусть

$$Z_0 = \sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\frac{m\pi x}{a}.$$

Тогда

$$Z_1 = \frac{8\sqrt{2}\,i}{\lambda_0\sqrt{ab}}\left\{2\sum_{\substack{r\\(r+m\ \text{неч.},}}\sum_{\substack{s\\s\ \text{неч.})}}\frac{m^2\cos\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{b}}{(r^2-m^2)\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar\lambda_0^2\right)} - \varepsilon_2\sum_s\frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{\frac{s^2}{b^2}-\bar\lambda_0^2}\right\}, \qquad (50)$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases}1 \text{ при } m \text{ нечетном},\\ 0 \text{ при } m \text{ четном}.\end{cases}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\lambda_0} - \frac{64}{\lambda_0^3\pi^2 a^2 b^2}\sum_{\substack{r\\(r+m\ \text{неч.},}}\sum_{\substack{s\\s\ \text{неч.})}}\frac{m^4}{(m^2-r^2)^2\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar\lambda_0^2\right)} -$$

$$- \frac{32\varepsilon_2}{\lambda_0^3\pi^2 a^2 b^2}\sum\frac{1}{\frac{s^2}{b^2}-\bar\lambda_0^2}, \quad \bar\lambda_0^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2}. \qquad (51)$$

Если же

$$Z_0 = \sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

то

$$Z_1 = \frac{8\sqrt{2}\,i}{\lambda_0\sqrt{ab}}\left\{2\sum_{\substack{r\\(r+n\ \text{неч.},}}\sum_{\substack{s\\s\ \text{неч.})}}\frac{n^2\cos\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{b}}{(s^2-n^2)\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar\lambda_0^2\right)} + \varepsilon_1\sum_r\frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{\frac{r^2}{a^2}-\bar\lambda_0^2}\right\}, \qquad (52)$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases}1 \text{ при } n \text{ нечетном},\\ 0 \text{ при } n \text{ четном}.\end{cases}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\lambda_0} - \frac{64}{\lambda_0^3 \pi^2 a^2 b^2} \sum_r \sum_s \frac{n^4}{(n^2 - s^2)^2 \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2 \right)} -$$

$$- \frac{32\varepsilon_1}{\lambda_0^3 \pi^2 a^2 b^2} \sum \frac{1}{\frac{r^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2}, \quad \lambda_0^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}. \tag{53}$$

Что касается следующих коэффициентов рядов (9) и (10): $Z_2, Z_3, \ldots, \lambda_3, \lambda_4, \ldots$, то мы не останавливаемся на их вычислении, так как оно очень громоздко. Дадим лишь выражение Z_2:

$$Z_2 = -\frac{\alpha}{\bar{\lambda}_0^2} \left\{ \frac{16}{\pi^2 ab} \sum_{r,s} \sum_{p,q} \left(\frac{m^2}{m^2 - r^2} - \frac{n^2}{n^2 - s^2} \right) \left(\frac{r^2}{r^2 - p^2} - \frac{s^2}{s^2 - q^2} \right) \frac{\cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b}}{(\bar{\lambda}_{rs}^2 - \lambda_0^2)(\bar{\lambda}_{pq}^2 - \bar{\lambda}_0^2)} - \right.$$

$$- \frac{8\varepsilon_1}{\pi^2 ab} \sum_{r,s} \sum_p \left(\frac{m^2}{m^2 - r^2} - \frac{n^2}{n^2 - s^2} \right) \frac{p^2 \cos \frac{p\pi x}{a}}{(p^2 - r^2) \left(\frac{p^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2 \right)} +$$

$$\left. + \frac{8\varepsilon_2}{\pi^2 ab} \sum_{r,s} \sum_q \left(\frac{m^2}{m^2 - r^2} - \frac{n^2}{n^2 - s^2} \right) \frac{q^2 \cos \frac{q\pi y}{b}}{(q^2 - s^2) \left(\frac{q^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2 \right)} \right\}.$$

§ 5

Кратные фундаментальные числа. Если $\lambda_0^2 = \lambda_{mn}^2$ является кратным фундаментальным числом уравнения (13) при контурном условии (14), то изложенный в § 3 метод вычисления Z_1 не годится, так как формула (31) для Z_1 может оказаться содержащей нули в знаменателе, именно, в тех случаях, когда найдутся значения: $r \neq m$, $s \neq n$, при которых

$$\lambda_{rs}^2 = \lambda_{mn}^2.$$

Пусть λ_0^2 есть кратное число кратности k. Тогда числу λ_0^2 отвечают фундаментальные функции $Z_{10}, Z_{20}, \ldots, Z_{k0}$. Пусть

$$Z_0 = A_1 Z_{10} + A_2 Z_{20} + \ldots + A_k Z_{k0},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — произвольные постоянные.

Исходя из написанного выше выражения Z_0, будем искать Z_1', т. е. решение уравнения Лапласа, при контурном условии:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial n} = \frac{i}{\lambda_0} \frac{\partial Z_0}{\partial s}.$$

Разложим Z_1' в ряд по функциям $Z_0^{(r,s)}$:

$$Z_1' = \sum_{j=1}^{k} A_j \sum_{r,s} a_{rs}^{(j)} Z_0^{(r,s)}(x, y),$$

где

$$a_{rs}^{(j)} = \frac{i}{\lambda_0^3} \int_L Z_0^{(r,s)} \frac{\partial Z_0^{(m_j, n_j)}}{\partial s} ds.$$

Здесь для большей определенности обозначено: $Z_0^{(j)} = Z_0^{(m_j, n_j)}$. Если обозначить $a_{rs}^{(j)}$ через $a_{rs}^{(m_j, n_j)}$, то нетрудно убедиться, интегрируя по частям, что

$$a_{rs}^{(m_j, n_j)} = -a_{m_j n_j}^{(r, s)}.$$

Переходим теперь к уравнению для Z_1'':

$$\Delta Z_1'' + \lambda_0^2 Z_1'' = -2\lambda_0\lambda_1 Z_0 - \lambda_0^2 Z_1',$$

$$\frac{\partial Z_1''}{\partial n} = 0 \text{ на } L.$$

Подставим в правую часть уравнения для Z_1'' ряд Z_1':

$$\Delta Z_1'' + \lambda_0^2 Z_1'' = -2\lambda_0\lambda_1 \sum_{j=1}^{k} A_j Z_0^{m_j n_j} - \lambda_0^2 \sum_{j=1}^{k} A_j \sum_{r,s} a_{rs}^{m_j n_j} Z_0^{(r,s)}(x, y).$$

Для существования решения последнего уравнения необходимо отсутствие в правой части его членов с $Z_0^{m_1, n_1}$, $Z_0^{m_2, n_2}, \ldots, Z_0^{m_k, n_k}$, т. е. необходимо выполнение k равенств вида:

$$2\lambda_1 A_1 + \lambda_0 a_{m_1 n_1}^{m_2 n_2} A_2 + \ldots + \lambda_0 a_{m_1 n_1}^{m_k n_k} A_k = 0,$$
$$\lambda_0 a_{m_2 n_2}^{m_1 n_1} A_1 + 2\lambda_1 A_2 + \ldots + \lambda_0 a_{m_2 n_2}^{m_k n_k} A_k = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_0 a_{m_k n_k}^{m_1 n_1} + \lambda_0 a_{m_k n_k}^{m_2 n_2} + \ldots + 2\lambda_1 A_k = 0.$$

Если умножить почленно первое уравнение на A_1, второе на $A_2, \ldots$, k-ое на A_k и сложить, то получим:

$$2\lambda_1 (A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_k^2) = 0,$$

откуда следует, что или $\lambda_1 = 0$ или

$$\sum_{j=1}^{k} A_j^2 = 0.$$

В последнем случае среди чисел A_j должны иметься комплексные числа.

Если воспользоваться свойством косой симметричности коэффициентов $a_{m_j n_j}^{(m_i n_i)}$, то определитель рассматриваемой однородной системы можно представить в виде:

$$\Delta(\lambda_1) = \begin{vmatrix} 2\lambda_1 & \lambda_0 a_{m_1 n_1}^{m_2 n_2} & \ldots & \Delta_0 a_{m_1 n_1}^{m_k n_k} \\ -\lambda_0 a_{m_1 n_1}^{m_2 n_2} & 2\lambda_1 & \ldots & \lambda_0 a_{m_2 n_2}^{m_k n_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda_0 a_{m_1 n_1}^{m_k n_k} & -\lambda_0 a_{m_2 n_2}^{m_k n_k} & \ldots & 2\lambda_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель этот обладает свойством:

$$\Delta(-\lambda_1) = (-1)^k \Delta(\lambda_1).$$

Поэтому, если $\lambda_1 \neq 0$, то наряду с корнем λ_1 имеется корень $-\lambda_1$. Если k нечетное, то имеется корень $\lambda_1 = 0$. Найдя корни уравнения $\Delta(\lambda_1) = 0$, следует затем найти A_j. Если все корни окажутся простыми, то будем иметь k различных значений λ_1 и k соответ-

ствующих им функций $Z_{10}, \ldots, Z_{k0}$; значения λ разветвляются, начиная с коэффициента при ε. Если окажутся кратные корни для λ_1, то разветвление λ может начаться с других членов, при более высокой степени ε.

Поясним эти общие рассуждения примерами, относящимися к прямоугольному бассейну.

В случае двукратного фундаментального числа для двух пар чисел (m, n) и (m', n') должно выполняться равенство:

$$\lambda_0^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) = \pi^2\left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2}\right).$$

Положим

$$\frac{m^2 - m'^2}{a^2} = \frac{n'^2 - n^2}{b^2} = \mu,$$

$$Z_0 = \frac{2A}{\sqrt{ab}} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} + \frac{2A'}{\sqrt{ab}} \cos\frac{m'\pi x}{a} \cos\frac{n'\pi y}{b}.$$

Z_1' имеет такой вид:

$$Z_1' = \frac{2Ai}{\lambda_0 \sqrt{ab}} \left\{ \frac{16}{ab\pi^2} \sum_r \sum_s \left(-\frac{m^2}{m^2 - r^2} + \frac{n^2}{n^2 - s^2} \right) \frac{\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b}}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{8a\varepsilon_1}{b\pi^2} \sum_r \frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{m^2 - r^2} + \frac{8b\varepsilon_2}{a\pi^2} \sum_s \frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{n^2 - s^2} \right\} +$$

$$+ \frac{2A'i}{\lambda_0 \sqrt{ab}} \left\{ \frac{16}{ab\pi^2} \sum_r \sum_s \left(-\frac{m'^2}{m'^2 - r^2} + \frac{n'^2}{n'^2 - s^2} \right) \frac{\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b}}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{8a\varepsilon_1}{b\pi^2} \sum_r \frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{m'^2 - r^2} + \frac{8b\varepsilon_2}{a\pi^2} \sum_s \frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{n'^2 - s^2} \right\}$$

(ε_1, $\varepsilon_2 = 0$ или 1, смотря по четности m, n).

Составляя выражение

$$-2\lambda_1\lambda_0 Z_0 - \lambda_0^2 Z_1'$$

и подставляя в него вместо Z_0 и Z_1' их значения, мы должны приравнять нулю коэффициенты при $\cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}$ и $\cos\frac{m'\pi x}{a} \cos\frac{n'\pi y}{b}$.

Здесь возможны такие случаи:

1) m и m' разной четности, n и n' также разной четности. Тогда среди членов второй фигурной скобки найдется $\cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}$, в первой скобке найдется $\cos\frac{m'\pi x}{a} \cos\frac{n'\pi y}{b}$. Поэтому будем иметь:

$$2\lambda_1 A + \frac{16A'i}{ab\,\lambda_0^2\pi^2} \left(\frac{m'^2}{a^2\mu} + \frac{n'^2}{b^2\mu} \right) = 0,$$

$$2\lambda_1 A' + \frac{16Ai}{ab\,\lambda_0^2\pi^2} \left(-\frac{m^2}{a^2\mu} - \frac{n^2}{b^2\mu} \right) = 0.$$

Отсюда найдем

$$\lambda_1 = \pm \frac{8}{\pi^2 \mu a b}, \tag{54}$$
$$A' = \pm A i.$$

Для Z_0 получаем два значения, соответствующие двум значениям λ_1:

$$Z_0 = \frac{2A}{\sqrt{ab}} \left(\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \pm i \cos \frac{m'\pi k}{a} \cos \frac{n'\pi y}{b} \right).$$

Если нормировать Z_0 так, чтобы

$$\iint\limits_S Z_0 \bar{Z}_0 \, dS = 1,$$

то будем иметь:

$$A = \frac{1}{2} e^{i\theta},$$

где θ—любое вещественное число. Положим $\theta = 0$. Тогда

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \left(\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \pm i \cos \frac{m'\pi x}{a} \cos \frac{n'\pi y}{b} \right),$$

$$Z_1 = \frac{16 i}{\pi^2 ab \sqrt{ab}\,\lambda_0} \left\{ \sum_r \sum_s{}' \left(-\frac{m^2}{m^2 - r^2} + \frac{n^2}{n^2 - s^2} \right) \frac{\cos \frac{r\pi x}{a} \cos \frac{s\pi y}{b}}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_r \frac{r^2 \cos \frac{r\pi x}{a}}{(m^2 - r^2)\left(\frac{r^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2\right)} + \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_s \frac{s^2 \cos \frac{s\pi y}{b}}{(n^2 - s^2)\left(\frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2\right)} \right\} \mp$$
$$\mp \frac{16}{\pi^2 ab \sqrt{ab}\,\lambda_0} \left\{ \sum_r \sum_s{}' \left(-\frac{m'^2}{m'^2 - r^2} + \frac{n'^2}{n'^2 - s^2} \right) \frac{\cos \frac{r\pi x}{a} \cos \frac{s\pi y}{b}}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_r \frac{r^2 \cos \frac{r\pi x}{a}}{(m'^2 - r^2)\left(\frac{r^2}{a^2} - \bar{\lambda}_0^2\right)} + \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_s \frac{s^2 \cos \frac{s\pi y}{b}}{(n'^2 - s^2)\left(\frac{s^2}{b^2} - \bar{\lambda}_0^2\right)} \right\}.$$

Значок (′) означает, что в сумме отсутствует член, для которого

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = \bar{\lambda}_0^2.$$

2) $m + m'$ или $n + n'$ четное. Тогда в выражении Z_1' не найдется членов с $\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$ и $\cos \frac{m'\pi x}{a} \cos \frac{n'\pi y}{b}$, а потому для A и A' будем иметь уравнения:

$$-2\lambda_0 \lambda_1 A = 0,$$
$$-2\lambda_0 \lambda_1 A' = 0,$$

откуда следует, что $\lambda_1 = 0$, а A и A' произвольны. Предположим для определенности, что обе суммы: $m + m'$ и $n + n'$ четные.

Оставляя пока A и A' произвольными, перейдем к определению λ_2, для чего составим Z_2':

$$Z_2' = \frac{16\pi^2 A}{ab\lambda_0^2}\left\{\frac{16}{\pi^2 ab}\sum_{r,s}\sum_{p,q}\left(\frac{m^2}{m^2-r^2}-\frac{n^2}{n^2-s^2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{r^2}{r^2-p^2}-\frac{s^2}{s^2-q^2}\right)\frac{\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{q\pi y}{b}}{\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}+\ldots\right\}+$$

$$+\frac{16\pi^2 A'}{ab\lambda_0^2}\left\{\frac{16}{\pi^2 ab}\sum_{r,s}\sum_{p,q}\left(\frac{m'^2}{m'^2-r^2}-\frac{n'^2}{n'^2-s^2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{r^2}{r^2-p^2}-\frac{s^2}{s^2-q^2}\right)\frac{\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{q\pi y}{b}}{\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)}+\ldots\right\}$$

(многоточие поставлено вместо членов, не имеющих для нас значения).

Возьмем правую часть уравнения (39) для Z_2''

$$-\lambda_0^2 Z_2' + (2\lambda_0\lambda_2 - 1)\,Z_0$$

и выделим в ней члены, содержащие $\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$, а также члены с $\cos\frac{m'\pi x}{a}\cos\frac{n'\pi y}{b}$. Получим:

$$(2\lambda_0\lambda_2+\alpha)\,A+\delta A=0,$$
$$\delta A+(2\lambda_0\lambda_2+\beta)\,A'=0,$$

где

$$\alpha=-1+\frac{256\pi^2}{\lambda_0^2 a^2 b^2}\sum_{r,s}\left(\frac{m'^2}{m'^2-r^2}-\frac{n'^2}{n'^2-s^2}\right)\frac{1}{\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2},$$

$$\beta=-1+\frac{256\pi^2}{\lambda_0^2 ab}\sum_{r,s}\left(\frac{m^2}{m^2-r^2}-\frac{n^2}{n^2-s^2}\right)\frac{1}{\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2},$$

$$\delta=\frac{256\pi^2}{\lambda_0^2 a^2 b^2}\sum_{r,s}\left(\frac{m^2}{m^2-r^2}-\frac{n^2}{n^2-s^2}\right)\left(\frac{m'^2}{m'^2-r^2}-\frac{n'^2}{n'^2-s^2}\right)\frac{1}{\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2}.$$

Уравнение, служащее для определения λ_2, имеет вид:

$$4\lambda_2^2\lambda_0^2+2\lambda_0(\alpha+\beta)\,\lambda_2+\alpha\beta-\delta^2=0.$$

Корни этого уравнения вещественны и, вообще говоря, различны. Найдя их, мы найдем затем два значения отношения A' к A и, следовательно, определим, с точностью до множителя A, две фундаментальные функции Z_0. Дальнейшие вычисления для определения следующих коэффициентов рядов (8) и (9) будут уже носить определенный характер.

Если бы мы предположили, что одно из чисел, например, $m+m'$—четное, а другое $n+n'$—нечетное, то оказалось бы, что $\delta=0$ и для A и A' мы имели бы:

$$(2\lambda_0\lambda_2+\alpha)\,A=0, \qquad (2\lambda_0\lambda_2+\beta)A'=0.$$

Отсюда или

$$\lambda_2=-\frac{\alpha}{2\lambda_0}, \quad A'=0, \quad A \text{ произвольно}$$

или

$$\lambda_2=-\frac{\beta}{2\lambda_0}, \quad A=0, \quad A' \text{ произвольно.}$$

Если λ_0^2 трехкратное фундаментальное число, т. е.

$$\lambda_0^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)=\pi^2\left(\frac{m'^2}{a^2}+\frac{n'^2}{b^2}\right)=\pi^2\left(\frac{m''^2}{a^2}+\frac{n''^2}{b^2}\right),$$

то, обозначая

$$\frac{m^2-m'^2}{a^2}=\frac{n'^2-n^2}{b^2}=\mu, \quad \frac{m^2-m''^2}{a^2}=\frac{n''^2-n^2}{b}=\nu$$

и, предполагая $m+m'$, $m+m''$, $n+n'$, $n+n''$ нечетными, получим такой результат:

λ_1 имеет три различных значения:

$$\lambda_1'=0, \quad \lambda_1''=\frac{16\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\pi^2ab\sqrt{ab}\mu\nu}, \quad \lambda_1'''=-\frac{16\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\pi^2ab\sqrt{ab}\,\mu\nu};$$

им соответствуют такие значения функции Z_0:

$$Z_0'=A\left(\mu\cos\frac{m'\pi x}{a}\cos\frac{n'\pi y}{b}-\nu\cos\frac{m''\pi x}{a}\cos\frac{n''\pi y}{b}\right),$$

$$Z_0''=A\left(\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}-\frac{\nu i}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\cos\frac{m'\pi x}{a}\cos\frac{n'\pi y}{b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu i}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\cos\frac{m''\pi x}{a}\cos\frac{n''\pi y}{b}\right),$$

$$Z_0'''=A\left(\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}+\frac{\nu i}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\cos\frac{m'\pi x}{a}\cos\frac{n'\pi y}{b}-\right.$$
$$\left.-\frac{\mu i}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\cos\frac{m''\pi x}{a}\cos\frac{n''\pi y}{b}\right).$$

Л Релей рассматривал случай, когда Z_0 имеет вид:

$$Z_0=\cos\frac{(2l+1)\,\pi x}{a}.$$

Для квадратной области в этом случае обязательно имеем двукратный корень λ_0^2. Для $l=0$ Релеем получена формула (54).

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР.

Поступило 10. I. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lamb. Hydrodynamics. Cambridge, 1906 (ch. VIII).
[2] Сретенский Л. Н., Теория волновых движений жидкости, ОНТИ 1936.
[3] Rayleigh L., On the vibrations of a rectangular sheet of rotating liquid. Phil. Mag., ser. 6, vol. V, pp. 297—301, 1903.
[4] Rayleigh L., Notes concerning tidal oscillations upon a rotating globe. Proc. Roy. Soc., ser. 6. vol. LXXXII, pp. 443—464, 1909.

P. POLOUBARINOVA-KOCHINA. ON THE VIBRATIONS OF A RECTANGULAR SHEET OF ROTATING LIQUID

SUMMARY

One can found the proper functions and proper numbers of the problem on the free oscillations of rotating water as power series (9) and (10), where Z, λ and ε are significations explicated by formulae (2) and (6). λ_0 and Z_0 are respectively a proper number and a proper function of the corresponding problem whithout rotation. Z_1 is done by (44) or (45)—(48), in some singular cases by (50) and (52). λ_2 is done by (49), (51) and (53). $\lambda_1 = 0$, if λ_0^2 is a simple number. The last paragraph contains some considerations about the case of λ_0^2 multiple.

Оглавление

Sommaire

Поправка

В № 2 математической серии «Известий ОМЕН» допущена ошибка в заглавии статьи В. Л. Гончарова на стр. 171. Это заглавие следует читать так: «Об интерполировании функций с конечным числом особенностей с помощью рациональных функций».

Авторы статей этого выпуска и их адреса

Les auteurs des articles de ce fascicule et leurs adresses

Гюнтер Николай Максимович, Б. Гребецкая ул., д. 4 кв. 10 Ленинград.
N. Gunter, rue Bolchaya Grebetskaya, 4, app. 10, Leningrad.

Колмогоров Андрей Николаевич, Старопименовский пер., д. 8, кв. 5, Москва.
A. Kolmogoroff, Staropimenovskiy péréoulok, 8, app. 5, Moscou.

Смирнов Николай Васильевич, Б. Полянка, д. 1/2, кв. 84, Москва.
N. Smirnoff, Bolchaya Polianka, 1/2, app. 84, Moscou.

Фиников Сергей Павлович, М. Николопесковский пер., д. 16, кв. 10, Москва.
S. Finikoff, Maliy Nikolopeskovskiy péréoulok, 16, app. 10, Moscou.

Келдыш Людмила Всеволодовна, Трудовая ул., д. 1, кв. 9, Горький.
L. Keldych, rue Troudovaya, 1, app. 9, Gorkiy.

Ляпунов Алексей Андреевич, Хавская ул., д. 18/2, кв. 4, Москва.
A. Liapounoff, rue Havskaya, 18/2, app. 4, Moscou.

Грошев Анатолий Васильевич, Брестский пер. д. 12/13, кв. 19, Москва.
A. Grocheff, Brestskiy péréoulok, 12/13, app. 19, Moscou.

Полубаринова-Кочина Пелагея Яковлевна, ул. Горького, д. 20/2, кв. 72, Москва.
P. Poloubarinova-Kotchina, rue Gorkogo, 20/2, app. 72 Moscou.

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 67, тел. В-3-47-38.
Adresse du Bureau de Rédaction: rue Bolchaya Kaloujskaya, 67 Moscou

Редактор серии **В. А. Толстиков** Техредактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 15/VIII 1937 г. Подписано к печати 17/XI 1937 г.
Формат 72×108 см. 9¾ печ. л. 45.760 зн. в печ. л.
Уполн. Главлита Б-31322. Тираж 2350 экз. Заказ 1217. АНИ № 759.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., д. 9.